# Critères pour l'indépendance algébrique et linéaire

Christian Jadot

# THESE de DOCTORAT de L'UNIVERSITE PARIS 6

*Spécialité :*

**Mathématiques pures - Théorie des nombres**

*présentée par*

**Christian JADOT**

pour obtenir le grade de **DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS VI**

Sujet de la thèse **:**

**Critères pour l'indépendance algébrique et linéaire**

soutenue le Lundi 15 Avril 1996

devant le jury composé de :

| | |
|---|---|
| **M. Francesco AMOROSO** | : Rapporteur |
| **M. Christophe SOULE** | : Rapporteur |
| **M. Yuri V. NESTERENKO** | |
| **M. Michel WALDSCHMIDT** | |
| **M. Patrice PHILIPPON** | : Directeur de Recherche |

## REMERCIEMENT


Je profite de cette page pour remercier tous les enseignants qui m'ont transmis leurs connaissances mathématiques et qui surtout m'ont donné la passion de faire des mathématiques.

Plus particulièrement je remercie :

- Messieurs DURIER et LASSALLE de l'Université de Dijon qui m'ont redonné le goût de faire des mathématiques de haut niveau lors d'une préparation à l'agrégation.

- Messieurs WALDSCHMIDT et PESKINE qui m'ont initié patiemment à la théorie des nombres et à la géométrie algébrique. Je les remercie d'autant plus, qu'ils l'ont fait par correspondance, ce qui n'est pas le plus simple et a dû leur demander beaucoup de temps.

- Monsieur PHILIPPON , qui m'a proposé ce sujet qui m'a passionné et surtout qui a su par ses idées et ses conseils m'aiguiller lorsque je faisais fausse route et bien souvent me relancer quand je piétinais. Je lui dois d'être devenu l'apprenti chercheur qui a réalisé cette thèse.

- Messieurs AMOROSO et SOULE qui ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et qui, grâce à leur lecture approfondie et à leurs remarques pertinentes, m'ont permis d'améliorer et de corriger certains résultats.

- Monsieur NESTERENKO qui a bien voulu faire partie du jury et dont les travaux m'ont considérablement aidé et influencé durant toute ma recherche.

Je remercie aussi toutes les personnes qui m'ont soutenu et encouragé de près ou de loin, au cours de cette lourde tâche.

Enfin ma dernière phrase sera pour CHRISTIANE, mon épouse, SOPHIE et CHRISTOPHE, mes deux enfants, à qui je dédie ces travaux. Je les remercie pour la patience qu'ils ont eu envers moi (ce n'était pas toujours facile !) et le soutien qu'ils m'ont apporté dans les moments difficiles que j'ai connus.

# Critères pour l'indépendance algébrique et linéaire

*Christian JADOT*

# 0 – Introduction

Cette thèse a pour objet d'affiner les critères pour l'indépendance algébrique et les mesures d'indépendance algébrique démontrés par *P. Philippon* dans [ P1 ] et par *E.M. Jabbouri* dans [ J1 ] d'une part, et l'indépendance linéaire et les mesures d'indépendance linéaire établis par *Y.V. Nesterenko* dans [ N1 ] et *P. Bundschuh* et *T. Töpfer* dans [ BT1 ] d'autre part, réalisant ainsi une jonction entre les problèmes d'indépendance linéaire et algébrique sur un corps de nombres.

La démarche adoptée consiste à reprendre le travail fait par *E.M. Jabbouri* dans [ J1 ] en contrôlant bien plus précisément les estimations. Un des points clé réside dans une définition soigneuse des hauteurs des sous-variétés d'un espace projectif, définies sur un corps de nombres et d'une bonne distance d'un point à une telle sous-variété. Les notions utilisées dans [ J1 ] ne sont pas suffisamment canoniques et ne coïncident pas, pour les sous-variétés linéaires, avec celles utilisées dans [ N1 ] .

Les travaux de *J.B. Bost* , *H. Gillet* et *C. Soulé* dans [ BGS1 ] et [ S1 ] sur les hauteurs et la théorie de l'intersection arithmétique ont permis de trouver de bonnes hauteurs des variétés projectives définies sur $\overline{\mathrm{Q}}$, qui généralisent la hauteur des sous-variétés linéaires et satisfont des théorèmes de Bézout (arithmétiques) très fins. Nous rappelons la définition de cette hauteur projective au paragraphe II-3, en termes de la forme de Chow associée à la variété.

Parallèlement à la hauteur projective, nous définissons et étudions au chapitre III une notion de distance algébrique d'un point à une sous-variété d'un espace projectif. Nous donnons cette définition également à l'aide de la forme de Chow. On obtient une distance toujours inférieure ou égale à 1. Nous montrons aussi que cette définition coïncide avec les notions déjà existantes dans le cas des points, des hypersurfaces et des variétés linéaires.

Nous établirons deux critères. qui s'énoncent de la façon suivante :

Si l'on suppose que l'on a un système de formes définies sur un corps de nombres, qui dans un espace projectif

- pour le premier critère, *prennent des valeurs petites en un point donné* $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)$ ,
- pour le second critère, sont *telles que la distance d'un point* $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)$ *aux hypersurfaces qu'elles définissent soient petites,*

mais dans les deux cas n'ont pas de zéro commun trop proche de ce point , alors on peut minorer la distance du point $\underline{\theta}$ à toute variété $Z(\mathfrak{I})$ définie sur le corps de nombres, de dimension, degré et hauteur bornés en fonction des formes.

En particulier, en construisant des formes quadratiques ( ou de degré donné $\delta$ ) réalisant les hypothèses du critère on peut établir l'indépendance quadratique ( ou en degré $\delta$ ) de nombres complexes.

Les deux critères sont énoncés sous deux formes A et B :

- la forme B utilisant la distance algébrique du point $\underline{\theta}$ à la sous-variété projective $Z(\mathfrak{I})$ définie dans le paragraphe III et notée $Dist_v\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)$ ,
- la forme A utilisant elle la distance ensembliste du point $\underline{\theta}$ à la sous-variété projective $Z(\mathfrak{I})$ notée $\mathrm{dist}_v\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)=\underset{\underline{\mathrm{y}}\in Z(\mathfrak{I})}{Min}\left(Dist_v\left(\underline{\theta},\underline{\mathrm{y}}\right)\right)$ .

Les quatre critères ainsi obtenus proposent des conclusions de type différents, et ne perdent rien les uns par rapport aux autres.

L'outil essentiel dans la démonstration des deux critères est une inégalité majorant la distance d'un point à l'intersection d'une sous-variété par une hypersurface d'un espace projectif en fonction de la distance de ce point à la sous-variété et à l'hypersurface. Nous obtenons au chapitre IV deux formules selon que le point est très proche de l'hypersurface ou non.
La démonstration du critère, au chapitre V, suit celle de *E.M. Jabbouri* dans [ J1 ] mais nécessite plusieurs aménagements. Par exemple nous introduisons deux paramètres supplémentaires afin, d'une part, de mieux contrôler le rayon de la boule d'exclusion des zéros communs et d'autre part de prendre en compte la différence entre la valeur d'une forme en un point et la distance de ce point à l'hypersurface que cette forme définit.

Pour l'énoncé exact de ces deux critères, on se rapportera aux ***Propositions 5.1*** et ***5.2*** .

La précision de ces deux critères permet d'en déduire un certain nombre de corollaires.

Etudions d'abord le cas linéaire.

- Le premier critère permet de retrouver le critère de *Y.V. Nesterenko* démontré dans [ N1 ] :

*Soient* $k$ *un entier appartenant à* $[0,n]$ *et* $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)\in \mathbb{C}_v^{n+1}$ .
*Soient* $\delta, N_0, c_1, c_2, \tau_1, \tau_2$ *des nombres positifs avec* $0\le \tau_1-\tau_2<\delta$ .
*Soit* $\sigma(t)$ *une fonction croissante pour* $t\ge N_0$ *telle que :*

$$\lim_{t\to+\infty}\sigma(t)=+\infty \quad et \quad \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\sigma(t+1)}{\sigma(t)}=1 \ .$$

*On suppose que pour tout entier naturel* $N>N_0$ *, il existe une forme linéaire* $L_N$ *de* $\mathbb{Z}[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ *telle que :*

$$(i)\ \|L_N\|\le e^{\sigma(N)} \ ,$$

$$(ii)\ c_1e^{-\tau_1\sigma(N)}\le\frac{|L_N(\underline{\theta})|}{\|\underline{\theta}\|}\le c_2e^{-\tau_2\sigma(N)} \ ,$$

*Soit* $\mathfrak{P}\subset\mathbb{Q}[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ *un idéal homogène de dimension* $k$ *de degré* $1$ *alors si* $k$ *est tel que* $0<k+1<\dfrac{\tau_1+1}{1+\delta}$ *, il existe un réel* $\mathrm{K}$ *tel que*

$$Dist(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P}))>\mathrm{K}.(V(\mathfrak{P}))^{-\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\delta)}} \ .$$

*De plus si* $\mathfrak{P}$ *est de hauteur suffisamment grande on a :*

$$\mathrm{K}\ge c_1.\left(\left(\frac{1}{(n+1)^{(k+1)}c_2}\right)^{k+1}\left(\frac{c_1}{2}\right)^{k}\right)^{\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\delta)}}.\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\right) .$$

- Le second critère entraîne le corollaire suivant :

*Soient $K$ un corps de nombres, $v$ une place quelconque de ce corps, $k$ un entier appartenant à $[0,n]$ et $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)\in \mathbb{C}_v^{n+1}$ .*

*Soient $\delta, N_0, c_1, c_2, \tau_1, \tau_2$ des nombres positifs avec $0\le \tau_1-\tau_2<\delta$ et $\tau_2>\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}$ .*

*Soit $\sigma(t)$ une fonction croissante pour $t\ge N_0$ telle que :*

$$\lim_{t\to+\infty}\sigma(t)=+\infty \quad et \quad \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\sigma(t+1)}{\sigma(t)}=1 \ .$$

*On suppose que pour tout entier naturel $N>N_0$ , il existe une forme linéaire $L_N$ de $K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ telle que :*

$$(\,i\,)\ \overline{\mathrm{h}}(L_N)\le e^{\sigma(N)} \quad ,$$

$$(\,ii\,)\ c_1e^{-\tau_1\sigma(N)}\le \frac{\left|L_N(\underline{\theta})\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v.M_v(L_N)}\le c_2e^{-\tau_2\sigma(N)} \quad ,$$

*Soit $\mathfrak{I}\subset K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ un idéal homogène de dimension $k$ de degré $D$ alors si $k$ est tel que $0<(k+1)D<\frac{\tau_1}{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}+\delta}$ , il existe un réel $\mathrm{K}>0$ tel que*

$$Dist(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P}))>\mathrm{K}.(H(\mathfrak{P}))^{-\frac{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}.\tau_1}{\tau_2-\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}(k+1)D-k.D.\delta}} \ .$$

Ce critère contient le fait suivant :

Lorsqu'il permet de montrer l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ de $n+1$ nombres complexes $\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n$ , on établit en fait la non appartenance du point $(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)$ à toute variété projective de dimension $k$ et de degré $D$ vérifiant $(k+1)D\le n$ . Ceci n'a rien d'étonnant, car d'après un résultat de *M. Chardin* dans [ C1 ] chapitre I, ces variétés sont contenues dans un hyperplan .

Etudions maintenant le cas non linéaire.

En utilisant le premier critère on peut déduire une forme améliorée du critère de *E. M. Jabbouri* .

*Soient* $K$ *un corps de nombres,* $v$ *une place quelconque de ce corps,* $k$ *un entier appartenant à* $[0,n]$ *et* $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)\in \mathbb{C}_v^{\,n+1}$ .

*Soient* $\delta,\tau,\sigma$ *et* $U$ *des réels avec* $\tau>0$ , $\sigma,\delta\geq 1$ , $\sigma^{k+1}<\tau$ *et* $\frac{\tau}{\sigma^{k+1}}<\left[\frac{U}{\sigma^{k+1}}\right]$ .

*On suppose que pour tout entier* $S$ *vérifiant :*

$$\text{(o)}\ \frac{\tau}{\sigma^{k+1}}<S\leq\frac{U}{\sigma^{k+1}} \quad ,$$

*il existe une famille de polynômes homogènes* $\left(Q_S^{(1)},\ldots,Q_S^{(n_S)}\right)$ *de* $K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ *telle que :*

$$\text{( i )}\ d^{\circ}Q_S^{(j)}\leq\delta \quad \text{pour tout } j=1,\ldots,n_S \quad ,$$

$$\text{( ii )}\ \overline{\mathrm{h}}\left(\left(Q_S^{(j)}\right)^*\right)\leq\tau \quad \text{pour tout } j=1,\ldots,n_S \quad ,$$

$$\text{( iii )}\ \frac{\left|Q_S^{(j)}(\underline{\theta})\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{d^{\circ}Q_S^{(j)}}}\leq e^{-S\sigma^{k+1}} \quad \text{pour tout } j=1,\ldots,n_S \quad ,$$

*( iv ) les polynômes* $Q_S^{(j)}$ *sont sans zéros communs dans la boule* $B\left(\underline{\theta},e^{-S\sigma^{k+2}}\right)$ *de* $\mathbb{C}_v^n$ *de centre* $\underline{\theta}$ *et de rayon* $e^{-S\sigma^{k+2}}$ .

*Soit* $\mathfrak{I}\subset K(X_0,X_1,\ldots,X_n)$ *un idéal homogène de dimension* $k$ *, de hauteur* $H$ *et de degré* $D$ .

*Si la condition suivante est réalisée*

*( v )*

$$\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}\delta^{k+1}H+\left(\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}\tau+(k+1)\delta.\log(n+1)+\log 3\right)(k+1)\delta^kD\leq\left[\frac{U}{\sigma^{k+1}}\right].\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} ,$$

*alors on a*

$$\log\left(Dist_v\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)\right)\geq -U \quad .$$

Enfin on peut déduire un certain nombre de corollaires du type de celui qui m'a été fourni par *P. Philippon* , et dont l'énoncé est le suivant :

*Soit* $k$ *un entier appartenant à* $[0,n]$ *et* $\underline{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in \mathbb{C}_v^{\,n}$ .
*Soient* $\delta,\sigma,\tau$ *et* $U$ *des réels tels que* $\sigma,\delta \geq 1$ *et* $U>\tau\geq 3.(k+1).\delta.\log(n+1)$ .

*On suppose que pour tout réel* $S$ *vérifiant* $\tau<S\leq U$ *, il existe un polynôme* $Q_S$ *de* $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ *tel que :*

- $d^\circ Q_S \leq \delta$ ,
- $\left\|Q_S^*\right\| \leq e^\tau$ ,
- $e^{-\sigma S+2\tau} \leq \dfrac{\left|Q_S(\underline{\theta})\right|}{\left(1+\left\|\underline{\theta}\right\|^2\right)^{\frac{d^\circ Q_S}{2}}} \leq e^{-S}$ .

*Alors pour tout idéal* $\mathfrak{I}\in \mathbb{Q}[X_1,\ldots,X_n]$ *de dimension* $k$ *, de degré* $D$ *et de hauteur* $H$ *satisfaisant*

$$2.\delta^k\left(\delta.H+\tau.(k+1)D\right)\leq \frac{U}{\sigma^{k+1}}$$

*on a*

$$\log\left(Dist_v\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)\right)\geq -U \ .$$

***Nota bene***

On obtient le même résultat, si l'on remplace la condition

$$e^{-\sigma S+2\tau} \leq \frac{\left|Q_S(\underline{\theta})\right|}{\left(1+\left\|\underline{\theta}\right\|^2\right)^{\frac{d^\circ Q_S}{2}}} \leq e^{-S}$$

par

$$e^{-\sigma S+\tau} \leq \frac{\left|Q_S(\underline{\theta})\right|}{\left(1+\left\|\underline{\theta}\right\|^2\right)^{\frac{d^\circ Q_S}{2}}.M_v\left(Q_S^*\right)} \leq e^{-S}$$

et que l'on applique le cas B du ***théorème 5.2*** . □

Nous aurons besoin dans ces travaux, d'un certain nombre de résultats relatifs à la théorie de l'élimination exposés dans [ P1 ] . Nous n'exposerons pas en détail cette théorie, mais pour en donner une première approche, nous rappellerons et adapterons certains résultats dans le premier paragraphe, en considérant des indices $\underline{d} = (1,\ldots,1) \in \mathbb{N}^r$ . Pour approfondir cette théorie, on se reportera à [ P1 ] .
Nous rappellerons aussi un certain nombres de résultats d'arithmétique qui nous seront utiles pour la suite.
Enfin, pour faciliter la lecture de cette thèse, nous donnerons dans ce premier paragraphe les notations qui seront utilisées le plus fréquemment au cours des paragraphes suivants.
Le deuxième paragraphe sera consacré à l'introduction de la hauteur d'une variété définie sur un corps de nombres $K$. Pour cela il nous faudra définir successivement dans les **définition 2.1** et **2.3** , la mesure d'un polynôme homogène puis celle d'un polynôme multihomogène. A partir de ces mesures, nous définirons, comme le fait *P. Philippon* dans [ P1 ] , la hauteur d'un polynôme homogène à la **définition 2.8** puis celle d'une sous-variété projective via sa forme de Chow associée à la **définition 2.12**.
Dans le troisième paragraphe, nous nous consacrerons à l'étude d'une distance algébrique d'indice $\underline{d} \in N^r$ d'un point $\underline{x}$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ à une sous-variété projective $V$ de dimension $r-1$ notée $Dist_{v,\underline{d}}(\underline{x},V)$ . Elle sera mise en place dans la **définition 3.1** .
Cette distance sera étudiée d'abord dans le cas où $V$ est un point et sera notée $Dist_{v,d}(\underline{x},\underline{y})$ . Dans cette étude nous verrons que lorsque l'indice $d=1$, elle coïncide avec la distance habituelle et nous la comparerons à la distance euclidienne de la carte affine $\{X_0 \neq 0\}$ dans la ***proposition 3.4*** . Puis dans la ***proposition 3.5*** nous comparerons deux distances d'indices différents.
La ***proposition 3.6*** montrera que la distance d'indice $(1,\ldots,1) \in \mathbb{N}^n$ d'un point à une hypersurface est celle habituellement utilisée. Enfin la ***proposition 3.10*** prouvera que la distance d'indice $(1,\ldots,1) \in \mathbb{N}^r$ d'un point à une sous-variété projective de dimension $r-1$ correspond encore à celle utilisée par *Y. V. Nesterenko* dans [ N1 ] .
Au quatrième paragraphe nous mettrons en place les résultats relatifs à l'intersection d'une sous-variété projective par une hypersurface de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$.
Le ***lemme 4.1*** et son ***corollaire 4.2*** nous permettent de comparer respectivement la mesure et la hauteur de l'intersection aux mesures et hauteurs de la sous-variété et de l'hypersurface.
Le ***corollaire 4.4*** montre une majoration de la distance d'un point donné à l'intersection d'une sous-variété projective par une hypersurface et la ***proposition 4.7*** donne cette majoration dans le cas où le point est relativement éloigné de la sous-variété projective. Auparavant nous aurons étudié dans la ***lemme 4.6*** le minimum des distances d'un point donné aux points d'une hypersurface.
Dans le cinquième paragraphe nous citerons les deux critères respectivement aux ***théorème 5.1*** et ***5.2***, ces critères ne diffèrent essentiellement que par l'hypothèse *(iii)* qui porte dans le premier sur la valeur des formes en un point donné et dans le second sur la distance de ce point aux hypersurfaces définies par ces formes. Les démonstrations étant semblables, seule celle du ***théorème 5.1*** sera rédigée.
Dans un premier temps, nous établirons un ***corollaire 5.4*** de la forme de celui établi par *E.M. Jabbouri* dans [ J1 ] .
Puis dans le cas linéaire nous écrirons d'abord un ***corollaire 5.5*** au ***théorème 5.1*** qui nous permettra de retrouver le critère de *Y.V Nesterenko* exposé dans le ***corollaire 5.6*** puis un ***corollaire 5.7*** au ***théorème 5.2*** qui nous permettra d'écrire le ***corollaire 5.8*** qui aura une forme similaire à celle du critère de *Y.V. Nesterenko* . C'est ce dernier corollaire qui nous servira à comparer indépendance algébrique et linéaire.
Enfin nous exposerons, le ***corollaire 5.9***, corollaire qui m'a été suggéré par *P. Philippon*. □

# I - Notations et Rappels

## 1 - Elimination

Soit $R$ un anneau commutatif unitaire noethérien et $A = R\left[X_0, X_1, \ldots, X_n\right]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $R$ et à variables $X_0, X_1, \ldots, X_n$ .

Soit $\mathfrak{M}^k = \left\{\underline{X}^{\alpha} = X_0^{\alpha_0} \ldots X_n^{\alpha_n} \ / \ \alpha_0 + \cdots + \alpha_n = k\right\}$ l'ensemble des monômes unitaires de degré $k$ .

Pour un entier naturel $r$, on définira :

$R_r$ de la façon suivante :

- Si $r = 0$ alors $R_0 = R$,
- Si $r \neq 0$ alors $R_r = R\left[u_0^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}, u_0^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}, \ldots, u_0^{(r)}, \ldots, u_n^{(r)}\right]$ .

$A_r$ de la façon suivante :

- Si $r = 0$ alors $A_0 = A$ ,
- Si $r \neq 0$ alors $A_r = A\left[u_0^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}, u_0^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}, \ldots, u_0^{(r)}, \ldots, u_n^{(r)}\right]$ .

Pour un entier naturel $r \geq 1$, on définit $U_j$ pour $j = 1, \ldots, r$, l'élément de $A_r$ :

$$U_j = u_0^{(j)} X_0 + u_1^{(j)} X_1 + \cdots + u_n^{(j)} X_n \ .$$

Etant donné un idéal homogène $\mathfrak{I}$ de $A$, pour un entier naturel $r$, on notera :

$\mathfrak{I}_r$ l'idéal de $A_r$ défini de la façon suivante :

- Si $r = 0$ alors $\mathfrak{I}_0 = \mathfrak{I}$,
- Si $r \neq 0$ alors $\mathfrak{I}_r = \left(\mathfrak{I}, U_1, \ldots, U_r\right)$ .

**Définition 1.1** - Pour un entier naturel $r$ donné, on appelle *idéal $U$-éliminant de $\mathfrak{I}$,* l'idéal $\mathfrak{E}_r\left(\mathfrak{I}\right)$ formé des éléments $f$ de $R_r$ tel qu'il existe un entier $k \geq 0$ pour lequel on a $f.\mathfrak{M}^k \subset \mathfrak{I}_r$ , c'est-à-dire :

$$\mathfrak{E}_r\left(\mathfrak{I}\right) = \left(\bigcup_{k \geq 0} \left(\mathfrak{I}_r :_{A_r} \mathfrak{M}^k\right)\right) \cap R_r$$

Comme les idéaux $\mathfrak{I}_r :_{A_r} \mathfrak{M}^k$ sont des idéaux emboîtés de $A_r$ et que $A_r$ est noethérien, la suite de ces idéaux est finie et il existe un entier $N$ tel que :

$$\mathfrak{E}_r\left(\mathfrak{I}\right) = R_r \cap \left(\mathfrak{I}_r :_{A_r} \mathfrak{M}^N\right)$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{E}_r\left(\mathfrak{I}\right) = \left\{f \in R_r \ / \ f.\mathfrak{M}^N \subset \mathfrak{I}_r\right\} \ .$$

***Exemples***

- Si $\mathcal{H}$ est l'hyperplan de $\mathrm{P}_2(\mathrm{C})$ dont l'idéal de définition dans $R[X_0, X_1, X_2]$ est $\mathfrak{I} = (\alpha X_0 + \beta X_1 + \gamma X_2)$ , on a :

$$\mathfrak{E}_2(\mathfrak{I}) = \left(\alpha\left(u_1^{(1)}u_2^{(2)} - u_2^{(1)}u_1^{(2)}\right) + \beta\left(u_2^{(1)}u_0^{(2)} - u_0^{(1)}u_2^{(2)}\right) + \gamma\left(u_0^{(1)}u_1^{(2)} - u_1^{(1)}u_0^{(2)}\right)\right) .$$

En effet , si l'on pose

$$f = \alpha\left(u_1^{(1)}u_2^{(2)} - u_2^{(1)}u_1^{(2)}\right) + \beta\left(u_2^{(1)}u_0^{(2)} - u_0^{(1)}u_2^{(2)}\right) + \gamma\left(u_0^{(1)}u_1^{(2)} - u_1^{(1)}u_0^{(2)}\right)$$

et $P = \alpha X_0 + \beta X_1 + \gamma X_2$

alors on a:

$$\begin{aligned}
f.X_0 &= \left(u_1^{(1)}u_2^{(2)} - u_2^{(1)}u_1^{(2)}\right).P - \left(\beta u_2^{(2)} - \gamma u_1^{(2)}\right)U_1 + \left(\beta u_2^{(1)} - \gamma u_1^{(1)}\right)U_2 \\
f.X_1 &= \left(u_2^{(1)}u_0^{(2)} - u_0^{(1)}u_2^{(2)}\right).P - \left(\gamma u_0^{(2)} - \alpha u_2^{(2)}\right)U_1 + \left(\gamma u_0^{(1)} - \alpha u_2^{(1)}\right)U_2 \\
f.X_2 &= \left(u_0^{(1)}u_1^{(2)} - u_1^{(1)}u_0^{(2)}\right).P - \left(\alpha u_1^{(2)} - \beta u_0^{(2)}\right)U_1 + \left(\alpha u_1^{(1)} - \beta u_0^{(1)}\right)U_2 .
\end{aligned}$$

- Si $\mathcal{P}$ est le point $(x_0, x_1, x_2)$ de $\mathrm{P}_2(\mathrm{C})$ dont l'idéal de définition dans $R[X_0, X_1, X_2]$ est $\mathfrak{I} = (x_0 X_1 - x_1 X_0, x_1 X_2 - x_2 X_1)$ , on a :

$$\mathfrak{E}_1(\mathfrak{I}) = \left(x_0 u_0^{(1)} + x_1 u_1^{(1)} + x_2 u_2^{(1)}\right) .$$

En effet, on remarque d'abord que :

$$x_2 X_0 - x_0 X_2 \in \mathfrak{I}$$

$$\begin{aligned}
\left(x_0 u_0^{(1)} + x_1 u_1^{(1)} + x_2 u_2^{(1)}\right) X_0 &= x_0.U_1 - u_1^{(1)}.(x_0 X_1 - x_1 X_0) + u_2^{(1)}.(x_2 X_0 - x_0 X_2) \\
\left(x_0 u_0^{(1)} + x_1 u_1^{(1)} + x_2 u_2^{(1)}\right) X_1 &= x_1.U_1 - u_2^{(1)}.(x_1 X_2 - x_2 X_1) + u_0^{(1)}.(x_0 X_1 - x_1 X_0) \\
\left(x_0 u_0^{(1)} + x_1 u_1^{(1)} + x_2 u_2^{(1)}\right) X_2 &= x_2.U_1 - u_0^{(1)}.(x_2 X_0 - x_0 X_2) + u_1^{(1)}.(x_1 X_2 - x_2 X_1) .
\end{aligned}$$

Considérons l'algèbre $\mathfrak{S}A_r$ des polynômes à coefficients dans $A$, et de variables $s_{k,l}^{(j)}$ (où $0 \le k \le n$ , $0 \le l \le n$ et $1 \le j \le r$ ) liées par les relations $s_{k,l}^{(j)} + s_{l,k}^{(j)} = 0$ .

Définissons l'homomorphisme $\delta$ de $A-$algèbres par :

$$\delta : A_r \longrightarrow \mathfrak{S}A_r \qquad \text{tel que} \quad \delta\left(u_k^{(j)}\right) = \sum_{l=0}^{n} s_{k,l}^{(j)} X_l .$$

On remarque que :

$$\delta(U_j)=0 .$$

En effet,

$$\delta(U_j)=\delta\left(\sum_{k=0}^{n}u_k^{(j)}X_k\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n}s_{k,l}^{(j)}X_l\right)X_k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n}\frac{1}{2}\left(s_{k,l}^{(j)}+s_{l,k}^{(j)}\right)X_kX_l$$

et par conséquent,

$$\delta(U_j)=0 .$$

Appelons $Z(\mathfrak{I})=\{\underline{x}=(x_0,\ldots,x_n)\in \mathbb{C}^{n+1} \text{ / pour tout } P\in\mathfrak{I} ,\ P(\underline{x})=0\}$ .

> ***Proposition 1.2*** *- Pour tout élément $f$ de $R_r$ et pour tout idéal premier $\mathfrak{I}$ de $R[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ , on a l'équivalence entre les propriétés suivantes:*
>
> *(i) : $f\in\mathfrak{E}_r(\mathfrak{I})$*
>
> *(ii) : Pour tout élément $\underline{x}$ de $Z(\mathfrak{I})$ on a $(\delta\circ f)(\underline{x})=0$, où $\delta\circ f$ est considérée comme une fonction de variables $X_0,X_1,\ldots,X_n$ .*

Démonstration

- $(i)\Rightarrow(ii)$

Si $f\in\mathfrak{E}_r(\mathfrak{I})$ , il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $i\in\mathbb{N}$ avec $0\le i\le n$ on a:

$$f.X_i^N=\alpha.P+\sum_{j=1}^{r}\alpha_jU_j \quad \text{avec } P\in\mathfrak{I}.$$

Comme on a vu que $\delta(U_j)=0$, on déduit immédiatement que

$$(\delta\circ f).X_i^N=\delta(\alpha.P) .$$

Or pour tout $\underline{x}$ de $Z(\mathfrak{I})$ il existe une composante $x_i$ de $\underline{x}$ non nulle, ce qui permet d'écrire la propriété (*ii*).

- $(ii)\Rightarrow(i)$

Si pour tout élément $\underline{x}$ de $Z(\mathfrak{I})$ on a $(\delta\circ f)(\underline{x})=0$, montrons que $f\in\mathfrak{E}_r(\mathfrak{I})$.

Pour un $i$ tel que $0\le i\le n$ définissons l'homomorphisme $\mathfrak{s}_i$ de $A-$algèbres par :

$$\mathfrak{s}_i : \mathfrak{S}A_r \longrightarrow X_i^{-1}A_r$$

tel que pour tout $j=1,\ldots,r$ :

$$\begin{cases}\mathfrak{s}_i\left(s_{k,i}^{(j)}\right)=\dfrac{u_k^{(j)}}{X_i} & si \quad k\neq i\\[2ex] \mathfrak{s}_i\left(s_{i,l}^{(j)}\right)=-\dfrac{u_l^{(j)}}{X_i} & si \quad l\neq i\\[2ex] \mathfrak{s}_i\left(s_{k,l}^{(j)}\right)=0 \quad si \quad (k=l=i) \quad ou \quad (k\neq i\ et\ l\neq i).\end{cases}$$

Si $k \neq i$, $\mathfrak{s}_{\mathbf{i}}\left(\delta\left(u_k^{(j)}\right)\right) = \mathfrak{s}_{\mathbf{i}}\left(\sum_{l=0}^{n} s_{k,l}^{(j)} X_l\right)$

$$= \sum_{l=0}^{n} \mathfrak{s}_{\mathbf{i}}\left(s_{k,l}^{(j)}\right) X_l$$

$$= u_k^{(j)} .$$

Si $k = i$, $\mathfrak{s}_{\mathbf{i}}\left(\delta\left(u_i^{(j)}\right)\right) = \mathfrak{s}_{\mathbf{i}}\left(\sum_{l=0}^{n} s_{i,l}^{(j)} X_l\right)$

$$= -\sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^{n} u_l^{(j)} \frac{X_l}{X_i}$$

$$= -\frac{U_j}{X_i} + u_i^{(j)} .$$

D'où pour tout $k$, tel que $0 \leq k \leq n$, on a : $X_i\left(\mathfrak{s}_{\mathbf{i}}\left(\delta\left(u_k^{(j)}\right)\right) - u_k^{(j)}\right) \in \mathfrak{I}_r$ ,

ce qui permet d'affirmer que pour tout $f \in A_r$, et pour tout $i$ avec $0 \leq i \leq n$,

il existe $n_i$ tel que $X_i^{n_i}\left(\delta \circ f - f\right) \in \mathfrak{I}_r$ .

Et par conséquent en prenant $N = \underset{0 \leq i \leq n}{Max}\left(n_i\right)$, on obtient :

pour tout $i$ tel que $0 \leq i \leq n$, $X_i^N \delta \circ f - X_i^N f \in \mathfrak{I}_r$ .

Comme d'autre part, $X_i^N \delta \circ f \in A_r$ et que pour tout élément $\underline{\mathrm{x}}$ de $\mathcal{Z}(\mathfrak{I})$ on a $\left(\delta \circ f\right)\left(\underline{\mathrm{x}}\right) = 0$, on déduit que $X_i^N \delta \circ f \in \mathfrak{I}_r$

Et par suite, on obtient bien la propriété (*ii*) . □

Si l'on considère un anneau intègre et principal $R$ et son corps de fractions $K$, d'après la *Proposition* (**1.5**) de [ P1 ], si $\mathfrak{I}$ est un idéal homogène pur de $A$ de codimension $n+1-r$, alors l'idéal $\mathfrak{E}_r\left(\mathfrak{I}\right)$ est principal et ses générateurs sont des polynômes de $R_r$ homogènes, pour $j = 1,\ldots,r$ par rapport à chaque groupe de variables $\mathcal{U}_j = \left\{u_0^{(j)},\ldots,u_n^{(j)}\right\}$ et de degré inférieur ou égal au degré de $\mathfrak{I}$ .

**Définition 1.3** - L'idéal $\mathfrak{I}$ étant un idéal homogène pur de $A$ de codimension $n+1-r$, on appelle *forme éliminante de* $\mathfrak{I}$, tout générateur de $\mathfrak{E}_r\left(\mathfrak{I}\right)$.

De façon plus générale, on appelle *forme éliminante de* $\mathfrak{I}$ *d'indice* $\underline{\mathrm{d}} = \left(d_1,\ldots,d_r\right) \in \mathrm{N}^r$ , tout générateur de $\mathfrak{E}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right)$ tel que :

$$\mathfrak{E}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right) = \left(\bigcup_{k \geq 0}\left(\mathfrak{I}[\underline{\mathrm{d}}] :_{A[\underline{\mathrm{d}}]} \mathfrak{M}^k\right)\right) \cap R[\underline{\mathrm{d}}] \quad \text{où}$$

$$\mathfrak{I}[\underline{\mathrm{d}}] = \left(\mathfrak{I}, U_1,\ldots,U_r\right) \quad \text{avec} \quad U_r = \sum_{\alpha_0+\cdots+\alpha_n = d_r} u_{\underline{\alpha}}^{(r)} \underline{\mathrm{X}}^{\underline{\alpha}}$$

et

$$\left.\begin{array}{l} A[\underline{\mathrm{d}}] = A\left[\ldots,u_{\underline{\alpha}}^{(1)},\ldots,u_{\underline{\alpha}}^{(r)},\ldots\right] \\ R[\underline{\mathrm{d}}] = R\left[\ldots,u_{\underline{\alpha}}^{(1)},\ldots,u_{\underline{\alpha}}^{(r)},\ldots\right] \end{array}\right\} \text{ on les indices } \underline{\alpha} = \left(\alpha_0,\ldots,\alpha_n\right) \text{ de } u_{\underline{\alpha}}^{(j)} \text{ vnrifient } \alpha_0+\cdots+\alpha_n = d_j .$$

## 2 - Arithmétique

Etant donné le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels , on note $\overline{\mathbb{Q}}$ sa clôture algébrique.

On considère un corps de nombres $K$ de degré $d = [K : \mathbb{Q}]$ muni d'une valeur absolue non triviale $|\,.\,|$ .

La restriction de cette valeur absolue au corps $\mathbb{Q}$ est :

- soit la valeur absolue usuelle (*archimédienne*)
- soit une valeur absolue $p$-adique (*ultramétrique*).

Deux valeurs absolues sont dites *équivalentes* sur $K$ lorsqu'elles définissent la même topologie sur $K$.

Les classes d'équivalences de ces valeurs absolues sont les *places de* $K$ on les note $v$.

Chaque place $v$ de $K$ est représentée par la valeur absolue normalisée $|\,.\,|_v$ définie par :

- $|x|_v = x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $x \geq 0$ et $v$ est archimédienne,
- $|p|_v = \dfrac{1}{p}$ si $p$ est premier et $v$ étend la valuation $p$-adique de $K$ .

L'ensemble des places archimédiennes sera noté $S_\infty$ , celui des places qui étendent la valuation $p$-adique de $K$ sera écrit $S_p$ .

Le complété de $K$ en la place $v$ sera noté $K_v$ et le complété de sa clôture algébrique sera notée $\mathbb{C}_v$ .

On notera $\pi_v$ le plongement de $K$ dans $\mathbb{C}_v$ étendant le plongement canonique de $K$ dans $K_v$ .

***Exemple*** - lorsque $K = \mathbb{Q}(\alpha)$,

- Détermination des plongements aux *places infinies* de $K$ .

Notons $\alpha_i$ pour $i$ variant de 1 à $d$ les $d$ racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme minimal de $\alpha$ .

On obtient alors $d$ plongements de $K$ dans $\mathbb{C}$ définis par chaque $\alpha_i$ :

$$\pi : K \to \mathbb{C}$$

$$a \mapsto \pi(a) \quad \text{tel que si } a \in \mathbb{Q} \text{ alors } \pi(a) = a$$

$$\text{et} \quad \pi(\alpha) = \alpha_i$$

et à chaque plongement $\pi$ on associe la valeur absolue définie par :

$$|\gamma|_\pi = |\pi(\gamma)| \; .$$

- Si $\alpha_i \in \mathbb{R}$ le plongement est dit réel et dans ce cas à chaque plongement est associé une place archimédienne réelle $v$ et $K_v = \mathbb{R}$ . On pose $n_v = 1$ .

- Si $\alpha_i \notin \mathbb{R}$ le plongement est dit complexe et dans ce cas les deux plongements définis par $\alpha_i$ et $\overline{\alpha}_i$ sont associés à une seule place archimédienne complexe $v$ et $K_v = \mathbb{C}$ . On pose alors $n_v = 2$ . On a en tout cas

$$n_v = [K_v : \mathbb{R}] \; .$$

Le nombre de places infinies de $K$ est alors $r + s$ ,

où $r$ est le nombre de places réelles et $s$ le nombre de places imaginaires avec $d = r + 2s$ .

On aura donc

$$\prod_{i=1}^{d} \left( X - |\alpha_i| \right) = \prod_{v \in S_\infty} \left( X - |\alpha|_v \right)^{n_v} \; .$$

• Détermination des plongements aux *places finies* de $K$ .
Etant donné un nombre entier premier $p$ .
Notons $\alpha_i^{(p)}$ pour $i$ variant de 1 à $d$ les $d$ racines dans $\mathbb{C}_p$ du polynôme minimal de $\alpha$ .
On obtient alors $d$ plongements de $K$ dans $\mathbb{C}_p$ définis par chaque $\alpha_i^{(p)}$ :

$$\begin{aligned} \pi_p &: K \to \mathbb{C}_p \\ a &\mapsto \pi_p(a) \quad \text{tel que si } a \in \mathbb{Q} \text{ alors } \pi_p(a) = a \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{et} \quad \pi_p(\alpha) = \alpha_i^{(p)} \end{aligned}$$

et à chaque plongement $\pi_p$ on associe la valeur absolue définie par :

$$|\gamma|_{\pi_p} = |\pi_p(\gamma)|_p \ .$$

On obtient ainsi toutes les places finies au dessus de $p$ . En général il y a plusieurs plongements associés à une même place $v$ , leur nombre $n_v$ est appelé le degré local en $v$ et noté

$$n_v = [K_v : \mathbb{Q}_p] \ .$$

On a alors

$$d = \sum_{v \in S_p} n_v$$

et

$$\prod_{i=1}^{d} \left( X - \left|\alpha_i^{(p)}\right|_p \right) = \prod_{v \in S_p} \left( X - |\alpha|_v \right)^{n_v} \ .$$

- *Formule du produit*

  Si $x \in K$ et $x \neq 0$

  on a $\displaystyle\prod_{v \in S_\infty} \left(|x|_v\right)^{n_v} = \frac{1}{\displaystyle\prod_{v \notin S_\infty} \left(|x|_v\right)^{n_v}}$ ou encore $\displaystyle\prod_{v \in S_\infty} \left(|x|_v\right)^{n_v} \times \prod_{v \notin S_\infty} \left(|x|_v\right)^{n_v} = 1$ .

- *Hauteur logarithmique absolue de Weil d'un nombre algébrique* $\alpha$
  Si $K$ est un corps de nombres contenant $\alpha$, on définit la hauteur logarithmique absolue de Weil par :

$$h(\alpha) = \frac{1}{[K:\mathbb{Q}]} \sum_v n_v \log\left(\max\left(1, |\alpha|_v\right)\right)$$

  où la somme est étendue à l'ensemble des places de $K$ .

  Cette hauteur ne dépend pas du corps $K$ choisi contenant $\alpha$ .

  De plus

  · pour tout $\alpha$ et $\beta$ algébriques on a : 
$$\begin{aligned} & h(\alpha) \geq 0 \\ & h(\alpha.\beta) \leq h(\alpha).h(\beta) \\ & h(\alpha+\beta) \leq \log 2 + h(\alpha) + h(\beta), \end{aligned}$$

  · pour tout $\alpha = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, on a $h(\alpha) = Max(|a|, |b|)$ .

## 3 - Notations

- On utilisera dans la suite de l'exposé la constante $\gamma_n$ définie par :

$$\gamma_n = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\right) .$$

On remarque que : $\frac{1}{2} \leq e.\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq \frac{\gamma_n}{(n+1).e^{\gamma}} \leq 1$ où $\gamma$ est la constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{i\to+\infty}\left(1+\cdots+\frac{1}{i}-\log i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}-\log\left(1+\frac{1}{i}\right)\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{t}{i(i+t)}dt\right) .$$

Un calcul montre que $\log\left(\frac{(n+1)e^{\gamma}}{\gamma_n}\right) = \sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{t}{i(i+t)}dt\right) \in \left[0, 1+(n+1)\log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right]$ .

- Pour un élément $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}_v^{n+1}$ , on note

  ▪ pour $v \in S_\infty$ , $\qquad \|\underline{\mathbf{a}}\|_v = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |a_i|_v^2}$ ,

  ▪ pour $v \in S_p$ , $\qquad \|\underline{\mathbf{a}}\|_v = \max_{0\leq i\leq n} |a_i|_v$ .

- On considère la fonction $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \psi(d) = 0 & \text{si } d = 1 \\ \psi(d) = \dfrac{d}{2} & \text{si } d \geq 2 . \end{cases}$$

- Pour $\underline{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_v^{n+1}$ , nous utiliserons les notations suivantes :

  ▪ $|\underline{\alpha}| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n$

  ▪ $\binom{d}{\underline{\alpha}}$ pour le coefficient multinômial $\frac{d!}{\alpha_0!\ldots\alpha_n!}$ où $|\underline{\alpha}| = d$ .

- On considère le plongement $\omega_d$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ dans $\mathrm{P}_N(\mathrm{C}_v)$ , où $N+1=\begin{pmatrix} n+d \\ n \end{pmatrix}$ ,

défini par :

$$\begin{aligned} \omega_d : \quad & \mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v) \longrightarrow \mathrm{P}_N(\mathrm{C}_v) \\ & (z_0,\dots,z_n) \mapsto \left( \dots, \begin{pmatrix} d \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} y_{\underline{\alpha}}, \dots \right) \end{aligned}$$

où $y_{\underline{\alpha}} = z_0^{\alpha_0} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ et les monômes $z_0^{\alpha_0} z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}$ sont dans le même ordre que pour le plongement de Veronese .

Nous dirons que $\omega_d$ est *un plongement de Veronese remodelé* .

Si $M$ est un point de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ de coordonnées projectives $\underline{z}=(z_0,\dots,z_n)$ , on notera $\underline{y}=(y_{\underline{\alpha}})_{|\underline{\alpha}|=d}$ les coordonnées projectives de $\omega_d(M)$ dans $\mathrm{P}_N(\mathrm{C}_v)$ .

- On note $\omega_d^*$ et $\tilde{\omega}_d$ les applications de $\mathrm{C}_v^{N+1}$ dans $\mathrm{C}_v^{N+1}$ définie par :

$$\begin{aligned} \omega_d^* : \quad & \mathrm{C}_v^{N+1} \longrightarrow \mathrm{C}_v^{N+1} \\ & (\dots, a_{\underline{\alpha}}, \dots) \mapsto \left( \dots, \begin{pmatrix} d \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} a_{\underline{\alpha}}, \dots \right) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \tilde{\omega}_d : \quad & \mathrm{C}_v^{N+1} \longrightarrow \mathrm{C}_v^{N+1} \\ & (\dots, a_{\underline{\alpha}}, \dots) \mapsto \left( \dots, \begin{pmatrix} d \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} a_{\underline{\alpha}}, \dots \right). \end{aligned}$$

Si $P(\underline{\mathrm{X}}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=d}^{n} a_{\underline{\alpha}} (\underline{\mathrm{X}})^{\underline{\alpha}}$ est un polynôme homogène de degré $d$ , on note :

$$\underline{\mathrm{P}} = (\dots, a_{\underline{\alpha}}, \dots) \in \mathrm{C}_v^{N+1} ,$$

$$\omega_d^*(P)(\underline{\mathrm{Y}}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=d}^{n} \begin{pmatrix} d \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} a_{\underline{\alpha}} Y_{\underline{\alpha}} \qquad \text{et}$$

$$\omega_d^*(\underline{\mathrm{P}}) = \left( \dots, \begin{pmatrix} d \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} a_{\underline{\alpha}}, \dots \right) \in \mathrm{C}_v^{N+1} ,$$

$$\tilde{\omega}_d(P)(\underline{\mathrm{X}}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=d}^{n} \begin{pmatrix} d \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} a_{\underline{\alpha}} (\underline{\mathrm{X}})^{\underline{\alpha}} .$$

· Dans le cas d'une place archimédienne *v*, en considérant sur $\mathrm{C}_v^{N+1}$ le produit scalaire hermitien :

$$\langle \underline{\mathrm{x}} | \underline{\mathrm{y}} \rangle = \sum_{i=0}^{N} x_i \overline{y}_i \quad ,$$

on remarque que :

$$|P(\underline{\mathrm{z}})|_v = \left| \left\langle \omega_d^*(\underline{\mathrm{P}}) \,\middle|\, \overline{\omega_d(\underline{\mathrm{z}})} \right\rangle \right|_v \quad .$$

***Remarques*** :

· Si $Z$ est une hypersurface de degré $d$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ d'équation $P(\underline{\mathrm{X}})=0$ alors $\omega_d(Z)$ est l'intersection d'un hyperplan de $\mathrm{P}_N(\mathrm{C}_v)$ d'équation $P^*(\underline{\mathrm{Y}})=0$ et de $\omega_d(\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v))$ où $P^*(\underline{\mathrm{Y}})=\omega_d^*(P)(\underline{\mathrm{Y}})$ .

· Si $M$ est un point de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ de coordonnées projectives $\underline{z}=(z_0,\ldots,z_n)$ , on sait qu'une forme éliminante d'indice $d$ de $M$ est $f(\underline{\mathrm{u}})=\sum_{|\underline{\alpha}|=d}\underline{z}^{\underline{\alpha}}.u_{\underline{\alpha}}$ et qu'une forme éliminante d'indice 1 de $\omega_d(M)$ de $\mathrm{P}_N(\mathrm{C}_v)$ est $g(\underline{\mathrm{v}})=\sum_{|\underline{\alpha}|=d}y_{\underline{\alpha}}.v_{\underline{\alpha}}$ .

Comme d'autre part $y_{\underline{\alpha}}=\begin{pmatrix} d\\ \underline{\alpha}\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}(\underline{z})^{\underline{\alpha}}$ , on obtient , en posant $\underline{\mathrm{u}}=\tilde{\omega}_d(\underline{\mathrm{v}})$ :

$$g(\underline{\mathrm{v}})=f(\underline{\mathrm{u}}) \quad .$$

- Soit $V$ une sous-variété de dimension $r-1$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ définie sur un corps de nombres $K$ dont l'idéal de définition dans $K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ est un idéal premier $\mathfrak{I}$ de rang $n-r$ .

Si $f$ est une forme éliminante d'indice $\underline{\mathrm{d}}=(d_1,\ldots,d_r)$ de l'idéal $\mathfrak{I}$ , cette forme éliminante est un élément de $K\left[\underline{\mathrm{u}}^{(1)},\underline{\mathrm{u}}^{(2)},\ldots,\underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right]$ homogène en chaque groupe de variables $\underline{\mathrm{u}}^{(j)}=\left(\ldots,u_{\underline{\alpha}}^{(j)},\ldots\right)$ où $|\underline{\alpha}|=d_j$ et de degré $d^\circ_{\mathfrak{u}_j}f$ en ce groupe de variables.

Le nombre de variables de ce groupe est $N_j+1$ avec $N_j+1=\begin{pmatrix} n+d_j\\ n\end{pmatrix}$.

Le degré total de $f$ est noté $d^\circ f$ , on a donc $d^\circ f=\sum_{j=1}^{r}d^\circ_{\mathfrak{u}_j}f$ .

On considère les applications $\tilde{\omega}_{d_j}$ définies sur $K\left[\underline{\mathrm{u}}^{(j)}\right]$ pour $j=1,\ldots,r$ par :

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_{d_j}:\ K\left[\underline{\mathrm{u}}^{(j)}\right] &\rightarrow K\left[\underline{\mathrm{u}}^{(j)}\right]\\ \left(\ldots,u_{\underline{\alpha}}^{(j)},\ldots\right) &\mapsto \left(\ldots,\begin{pmatrix} d_j\\ \underline{\alpha}\end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}u_{\underline{\alpha}}^{(j)},\ldots\right)\end{aligned}$$

et l'application $\tilde{\omega}_{\underline{\mathrm{d}}}$ définie sur $K\left[\underline{\mathrm{u}}^{(1)},\underline{\mathrm{u}}^{(2)},\ldots,\underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right]$ pour $\underline{d}=(d_1,\ldots,d_r)\in\mathrm{N}^r$ telle que la restriction de $\tilde{\omega}_{\underline{\mathrm{d}}}$ sur chaque $K\left[\underline{\mathrm{u}}^{(j)}\right]$ soit l'application $\tilde{\omega}_{d_j}$ .

On note alors :

$$f_v\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)},\underline{\mathrm{u}}^{(2)},\ldots,\underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right)=\begin{cases} f\left(\tilde{\omega}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)},\underline{\mathrm{u}}^{(2)},\ldots,\underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right)\right) & \text{si la place } v \text{ est infinie}\\ f\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)},\underline{\mathrm{u}}^{(2)},\ldots,\underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right) & \text{si la place } v \text{ est finie}\end{cases} .$$

***Remarque :*** Si $U_j = \sum_{|\underline{\alpha}|=d_j} u_{\underline{\alpha}}^{(j)} \underline{X}^{\underline{\alpha}}$ et $Y_{\underline{\alpha}} = X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}$, on note :

$$U_{v,j} = \begin{cases} \sum_{|\underline{\alpha}|=d_j} \begin{pmatrix} d_j \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} u_{\underline{\alpha}}^{(j)} \underline{X}^{\underline{\alpha}} & \text{si la place } v \text{ est infinie} \\ \sum_{|\underline{\alpha}|=d_j} u_{\underline{\alpha}}^{(j)} \underline{X}^{\underline{\alpha}} & \text{si la place } v \text{ est finie} \end{cases}$$

et

$$U_{v,j}^{*} = \begin{cases} \sum_{|\underline{\alpha}|=d_j} \begin{pmatrix} d_j \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} u_{\underline{\alpha}}^{(j)} Y_{\underline{\alpha}} & \text{si la place } v \text{ est infinie} \\ \sum_{|\underline{\alpha}|=d_j} u_{\underline{\alpha}}^{(j)} Y_{\underline{\alpha}} & \text{si la place } v \text{ est finie} \end{cases}$$

- Soit $\underline{x} = (x_0, x_1 \dots, x_n)$ un élément de $\mathrm{C}_v^{n+1}$ et $\mathrm{C}_v[\underline{d}]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathrm{C}_v$ et de variables $s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(j)}$ (pour $1 \le j \le r$ et $|\underline{\alpha}| = |\underline{\alpha}'| = d_j$) liées par les relations $s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(j)} + s_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}}^{(j)} = 0$ .

On considère l'homomorphisme de $\mathrm{C}_v$ -algèbre associé à $\underline{x} = (x_0, x_1 \dots, x_n)$

$$\delta_{v,\underline{x},\underline{d}} : \mathrm{C}_v[\underline{d}] \longrightarrow \mathrm{C}_v[\underline{d}]$$

défini par :

$$\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right) = \begin{cases} \sum_{|\underline{\alpha}'|=d_j} \begin{pmatrix} d_j \\ \underline{\alpha}' \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(j)} \cdot \underline{\mathrm{x}}^{\underline{\alpha}'} & \text{si la place } v \text{ est infinie} \\ \sum_{|\underline{\alpha}'|=d_j} s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(j)} \cdot \underline{\mathrm{x}}^{\underline{\alpha}'} & \text{si la place } v \text{ est finie} \end{cases} .$$

Le polynôme $\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)$ est un polynôme de $\delta_{\underline{x},\underline{d}}(f)$ homogène en chaque groupe de variables $\underline{s}^{(j)} = \left(\dots, s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(j)}, \dots\right)$ où $\underline{\alpha} \prec \underline{\alpha}'$ et $|\underline{\alpha}| = |\underline{\alpha}'| = d_r$ , l'inégalité "$\prec$" étant l'ordre lexicographique inverse strict .

On remarque que le degré du polynôme $\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)$ par rapport au groupe de variables $\underline{s}^{(j)}$ est $d^{\circ}_{u_j} f$ et par conséquent le degré total de $\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)$ est $d^{\circ} f$. De plus, le nombre de variables de ce groupe est $N'_j + 1 = \dfrac{(N_j+1)N_j}{2}$ avec $N_j + 1 = \dbinom{n+d_j}{n} \leq (n+1)^{d_j}$.

On montre facilement que $N'_j + 1 \leq \dfrac{(n+1)^{2.d_j}}{2.d_j}$ et que $\gamma_{N'_j} \leq (N'_j+1)e^{\gamma} \leq \dfrac{(n+1)^{2.d_j}}{d_j}$ .

- On utilisera un certain nombre de spécialisations de formes éliminantes. Dans un souci de cohérences des notations nous allons définir celles les plus fréquemment utilisées.

Soient $\underline{d} = (d_1,\ldots,d_{r-1},d_r) \in \mathrm{N}^r$ , $\hat{\underline{d}} = (d_1,\ldots,d_{r-1}) \in \mathrm{N}^{r-1}$ et plus généralement $\hat{\underline{d}}_j = (d_1,\ldots,d_{j-1},d_{j+1},\ldots,,d_r) \in \mathrm{N}^{r-1}$ .

· On note $\rho$ l'homomorphisme défini par :

$$\rho : K[d_r] \longrightarrow K$$

tel que

$$\rho\left(u_{\underline{\alpha}}^{(r)}\right) = \mu_{\underline{\alpha}} \in K \qquad \text{avec } |\underline{\alpha}| = d_r .$$

On prolonge naturellement l'homomorphisme $\rho$ en un homomorphisme

$$\rho : K[\underline{d}] \longrightarrow K\left[\hat{\underline{d}}\right]$$

en posant $\rho\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right) = u_{\underline{\alpha}}^{(j)}$ pour $j = 1,\ldots,r-1$ et $|\underline{\alpha}| = d_j$ .

Si l'on pose $g = \rho(f)$, alors $g_v = \rho_v^*(f_v)$ où $\rho_v^*$ est l'homomorphisme défini par :

$$\rho_v^* : \mathrm{C}_v[\underline{d}] \longrightarrow \mathrm{C}_v\left[\hat{\underline{d}}\right] \qquad \text{tel que}$$

$$\begin{cases} \rho_v^*\left(u_{\underline{\alpha}}^{(r)}\right) = \dbinom{d_r}{\underline{\alpha}}^{-\frac{1}{2}} \mu_{\underline{\alpha}} & \text{si la place } v \text{ est infinie,} \\ \rho_v^*\left(u_{\underline{\alpha}}^{(r)}\right) = \mu_{\underline{\alpha}} & \text{si la place } v \text{ est finie.} \\ \rho_v^*\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right) = \rho\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right) & \text{pour } j = 1,\ldots,r-1 \end{cases}$$

· On note $\hat{\rho}_j$ l'homomorphisme défini par :

$$\hat{\rho}_j : \mathrm{C}_v\left[\hat{\underline{\mathrm{d}}}_j\right] \longrightarrow \mathrm{C}_v$$

tel que

$$\hat{\rho}_j\left(u_{\underline{\alpha}}^{(k)}\right) = \mu_{\underline{\alpha}}^{(k)} \in \mathrm{C}_v \qquad \text{avec} \quad \left|\underline{\alpha}\right| = d_k \quad \text{pour} \quad k=1,\ldots,j\text{-}1,j+1,\ldots,r \qquad .$$

On prolonge naturellement l'homomorphisme $\hat{\rho}_j$ en un homomorphisme

$$\hat{\rho}_j : \mathrm{C}_v\left[\underline{\mathrm{d}}\right] \longrightarrow \mathrm{C}_v\left[d_j\right]$$

en posant $\hat{\rho}_j\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right) = u_{\underline{\alpha}}^{(j)}$ avec $\left|\underline{\alpha}\right| = d_j$ .

· On note $\hat{\rho}'_j$ l'homomorphisme défini par :

$$\hat{\rho}'_j : \mathrm{C}_v\left[d_1,\ldots,d_{j-1}\right] \times \mathrm{C}_v\left[d_{j+1},\ldots,d_r\right] \longrightarrow \mathrm{C}_v$$

tel que

$$\begin{cases} \hat{\rho}'_j\left(s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(k)}\right) = \sigma_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(k)} \in \mathrm{C}_v & \text{avec} \quad \left|\underline{\alpha}\right| = \left|\underline{\alpha}'\right| = d_k \quad \text{pour} \quad k=1,\ldots,j\text{-}1 \\ \hat{\rho}'_j\left(u_{\underline{\alpha}}^{(k)}\right) = \mu_{\underline{\alpha}}^{(k)} \in \mathrm{C}_v & \text{avec} \quad \left|\underline{\alpha}\right| = d_k \quad \text{pour} \quad k=j+1,\ldots,r\ . \end{cases}$$

La encore, on prolonge naturellement l'homomorphisme $\hat{\rho}_j$ en un homomorphisme

$$\hat{\rho}'_j : \mathrm{C}_v\left[d_1,\ldots,d_{j-1}\right] \times \mathrm{C}_v\left[d_j,\ldots,d_r\right] \longrightarrow \mathrm{C}_v\left[d_j\right]$$

en posant $\hat{\rho}'_j\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right) = u_{\underline{\alpha}}^{(j)}$ avec $\left|\underline{\alpha}\right| = d_j$ .

## II - Hauteur d'une variété projective

### 1 - Mesure d'un polynôme

#### *a - Mesure d'un polynôme homogène*

Soient $K\left[X_0, X_1, \ldots, X_n\right]$ l'anneau des polynômes d'indéterminées $X_0, X_1, \ldots, X_n$ à coefficients dans $K$ et $P$ un élément homogène de degré $d$ de cet anneau.

> **Définition 2.1** - La *mesure de $P$ en la place $v$*, que l'on notera $M_v(P)$, sera le nombre défini de la façon suivante :
>
> ▪ si $v \in S_p$, $M_v(P)$ est le maximum des valeurs absolues $v$-adiques des coefficients du polynôme $\pi_v(P)$, c'est aussi le maximum des valeurs absolues $v$-adiques des coefficients du polynôme $P$.
>
> ▪ si $v \in S_\infty$, la mesure $M_v(P)$ du polynôme $P$, est définie par :
>
> · si $P = 0$ alors $M_v(P) = 0$,
>
> · si $P \neq 0$ alors $M_v(P) = \exp\left(\int_{S_{n+1}} \log\left|\pi_v\left(P(\underline{z})\right)\right| \sigma_{n+1}(\underline{z})\right).(\gamma_n)^{\frac{d}{2}}$
>
> où $S_{n+1}$ est la sphère unité de $\mathbb{C}_v^{n+1}$ et $\sigma_{n+1}(\underline{z})$ est la mesure invariante de masse totale 1 sur $S_{n+1}$.

Cette dernière expression de $M_v(P)$ a bien un sens , et elle ne dépend pas de l'anneau $K\left[X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots, X_{n+m}\right]$ dans lequel $P$ est considéré.

Pour démontrer cette propriété nous considérerons un polynôme $P$ homogène de degré total $d$ de $K\left[X_0, X_1, \ldots, X_n\right]$ et nous nous placerons dans $K\left[X_0, X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}\right]$. Le polynôme $P$ reste bien sûr homogène de degré total $d$ dans ce nouvel anneau.

On note pour $\underline{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}_v^{k+1}$,

$$\|\underline{z}\|^2 = \sum_{i=0}^{k} |z_i|_v^2, \qquad B_{k+1}(r) = \left\{\underline{z} \in \mathbb{C}_v^{k+1} ; \|\underline{z}\| \leq r\right\} \quad \text{et} \quad S_{k+1}(r) = \left\{\underline{z} \in \mathbb{C}_v^{k+1} ; \|\underline{z}\| = r\right\},$$

de plus, on pose $B_{k+1} = B_{k+1}(1)$ et $S_{k+1} = S_{k+1}(1)$.

On utilisera les opérateurs

$$\partial = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial}{\partial z_i} \cdot dz_i \qquad \text{et} \qquad \bar{\partial} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \cdot d\bar{z}_i \; ,$$

$$\mathrm{d} = \bar{\partial} + \partial \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d^c} = \frac{\left(\bar{\partial} - \partial\right)}{-4\mathrm{i}\pi}.$$

On aura besoin aussi des mesures

- $$\mu(\underline{z}) = \frac{\partial\bar{\partial}\|\underline{z}\|^2}{-2\mathrm{i}} = \sum_{i=0}^{k} \frac{dz_i \wedge d\bar{z}_i}{-2\mathrm{i}}$$

  $\mu_l(\underline{z}) = \dfrac{\mu(\underline{z}) \wedge \cdots \wedge \mu(\underline{z})}{l!}$ pour $1 \le l \le k+1$ , le produit étant répété $l$ fois.

  On remarque que

  $\mu_{k+1}(\underline{z}) = \dfrac{\bigwedge_{i=0}^{k}(dz_i \wedge d\bar{z}_i)}{(-2\mathrm{i})^{k+1}}$ ( mesure de Lebesgue sur $\mathrm{C}^{n+1}$ ).

- $$\sigma_{k+1}(\underline{z}) = \frac{k!}{\pi^k} \cdot \frac{\mathrm{d^c}\|\underline{z}\|^2 \wedge \mu_k(\underline{z})}{\|\underline{z}\|^{2(k+1)}},$$

  cette mesure étant telle que $\int_{S_{k+1}(r)} \sigma_{k+1}(\underline{z}) = 1$ pour tout $r > 0$.

On aura besoin plusieurs fois du résultat suivant :

> ***Lemme 2.2 :*** *Avec les notations introduites précédemment on a la relation :*
>
> $$\bigwedge_{i=0}^{k}(dz_i \wedge d\bar{z}_i) = \frac{\pi^{k+1}(-2\mathrm{i})^{k+1}}{k!}\|\underline{z}\|^{2k}.\mathrm{d}\|\underline{z}\|^2 \wedge \sigma_{k+1}(\underline{z}).$$

*Démonstration :*

Comme

$$\sigma_{k+1}(\underline{z}) = \frac{k!}{\pi^k} \cdot \frac{\mathrm{d^c}\|\underline{z}\|^2 \wedge \mu_k(\underline{z})}{\|\underline{z}\|^{2(k+1)}}$$

donc

$$\begin{aligned}\sigma_{k+1}(\underline{z}) \wedge \mathrm{d}\|\underline{z}\|^2 &= \frac{k!}{\pi^k} \cdot \frac{\mathrm{d^c}\|\underline{z}\|^2 \wedge \mu_k(\underline{z}) \wedge \mathrm{d}\|\underline{z}\|^2}{\|\underline{z}\|^{2(k+1)}} \\ &= \frac{k!}{\pi^k} \cdot \frac{\mathrm{d^c}\|\underline{z}\|^2 \wedge \mathrm{d}\|\underline{z}\|^2 \wedge \mu_k(\underline{z})}{\|\underline{z}\|^{2(k+1)}},\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}\mathrm{d^c}\|\underline{z}\|^2 \wedge \mathrm{d}\|\underline{z}\|^2 &= \frac{-1}{4\mathrm{i}\pi}(\bar{\partial} - \partial)\|\underline{z}\|^2 \wedge (\bar{\partial} + \partial)\|\underline{z}\|^2 \\ &= \frac{-1}{2\mathrm{i}\pi}\left(\bar{\partial}\|\underline{z}\|^2 \wedge \partial\|\underline{z}\|^2\right) \\ &= \frac{-1}{2\mathrm{i}\pi}\left(\sum_{i=0}^{k} z_i d\bar{z}_i\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{k} \bar{z}_i dz_i\right)\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{d^c}\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\wedge \mathrm{d}\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\wedge\mu_k(\underline{\mathrm{z}})=\frac{-1}{2\mathrm{i}\pi}\left(\sum_{i=0}^{k}z_i d\overline{z}_i\right)\wedge\left(\sum_{i=0}^{k}\overline{z}_i dz_i\right)\wedge\mu_k(\underline{\mathrm{z}})$$
$$=\frac{-1}{2\mathrm{i}\pi.k!}\left(\sum_{i=0}^{k}z_i d\overline{z}_i\right)\wedge\left(\sum_{i=0}^{k}\overline{z}_i dz_i\right)\wedge\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{dz_i\wedge d\overline{z}_i}{-2i}\right)^{\wedge k}.$$

Les seuls termes qui ne sont pas nuls sont du type

$$d\overline{z}_i\wedge dz_i\wedge\left(\bigwedge_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}\left(dz_j\wedge d\overline{z}_j\right)\right)=-\bigwedge_{i=0}^{k}\left(dz_i\wedge d\overline{z}_i\right),$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{d^c}\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\wedge \mathrm{d}\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\wedge\mu_k(\underline{\mathrm{z}})=\frac{-\|\underline{\mathrm{z}}\|^2}{(-2\mathrm{i})^{k+1}\pi}\left(\bigwedge_{i=0}^{k}\left(dz_i\wedge d\overline{z}_i\right)\right)$$

et

$$\mathrm{d}\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\wedge\sigma_{k+1}(\underline{\mathrm{z}})=\frac{k!}{(-2\mathrm{i})^{k+1}\pi^{k+1}}\cdot\frac{\bigwedge_{i=0}^{k}\left(dz_i\wedge d\overline{z}_i\right)}{\|\underline{\mathrm{z}}\|^{2k}}$$

c'est-à-dire

$$\bigwedge_{i=0}^{k}\left(dz_i\wedge d\overline{z}_i\right)=\frac{\pi^{k+1}(-2\mathrm{i})^{k+1}}{k!}\|\underline{\mathrm{z}}\|^{2k}\,\mathrm{d}\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\wedge\sigma_{k+1}(\underline{\mathrm{z}}).\ \square$$

Revenons maintenant à la propriété d'invariance mentionnée après la **définition 2.1**.

Posons $\underline{\mathrm{z}}=(z_0,z_1,\ldots,z_n,z_{n+1})\in\mathrm{C}^{n+2}$ et $\underline{\hat{\mathrm{z}}}=(z_0,z_1,\ldots,z_n)\in\mathrm{C}^{n+1}$,

on remarque que $P(\underline{\mathrm{z}})=P(\underline{\hat{\mathrm{z}}})$

En utilisant les résultats de la proposition 1 de [ P2 ] et son *nota bene* pour un polynôme homogène, on obtient, en notant $Z=\left\{\underline{\mathrm{z}}=(z_0,z_1,\ldots,z_n,z_{n+1})\in\mathrm{C}^{n+2}\ /\ P(\underline{\mathrm{z}})=0\right\}$

$$\int_{S_{n+2}}\log\left|\pi_v\left(P(\underline{\mathrm{z}})\right)\right|\sigma_{n+2}(\underline{\mathrm{z}})=\frac{(n+2)!}{\pi^{n+2}}\int_{B_{n+2}}\log\left|\pi_v\left(P(\underline{\mathrm{z}})\right)\right|\mu_{n+2}(\underline{\mathrm{z}})+\frac{(n+1)!}{2\pi^{n+1}}\int_{Z\cap B_{n+2}}\left(1-\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\right)\mu_{n+1}(\underline{\mathrm{z}})$$
$$=\frac{(n+2)!}{\pi^{n+2}}\int_{B_{n+2}}\log\left|\pi_v\left(P(\underline{\mathrm{z}})\right)\right|\mu_{n+2}(\underline{\mathrm{z}})+d.\frac{1}{2(n+2)}.$$

D'autre part, comme $P(\underline{\mathrm{z}})$ est indépendant de $z_{n+2}$, on a

$$\int_{B_{n+2}}\log\left|\pi_v\left(P(\underline{\mathrm{z}})\right)\right|\mu_{n+2}(\underline{\mathrm{z}})=\int_{B_{n+1}}\log\left|\pi_v\left(P(\underline{\hat{\mathrm{z}}})\right)\right|\left(\int_{B_1\left(\sqrt{1-\|\underline{\hat{\mathrm{z}}}\|^2}\right)}\mu_1(z_{n+1})\right)\mu_{n+1}(\underline{\hat{\mathrm{z}}})\ .$$

Or

$$\int_{B_1\left(\sqrt{1-\|\underline{\hat{z}}\|^2}\right)} \mu_1\left(z_{n+1}\right) = \pi\left(1-\|\underline{\hat{z}}\|^2\right) ,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_{B_{n+2}} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{z}\right)\right)\right| \mu_{n+2}\left(\underline{z}\right) &= \pi \int_{B_{n+1}} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{\hat{z}}\right)\right)\right| \left(1-\|\underline{\hat{z}}\|^2\right) \mu_{n+1}\left(\underline{\hat{z}}\right) \\ &= \frac{\pi}{\left(-2\mathrm{i}\right)^{n+1}} \int_{B_{n+1}} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{\hat{z}}\right)\right)\right| \left(1-\|\underline{\hat{z}}\|^2\right) \bigwedge_{i=0}^{n} \left(dz_i \wedge d\overline{z}_i\right).\end{aligned}$$

Et par conséquent d'après le ***Lemme 2.2*** ,

$$\int_{B_{n+2}} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{z}\right)\right)\right| \mu_{n+2}\left(\underline{z}\right) = \frac{\pi^{n+2}}{n!} \int_{B_{n+1}} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{\hat{z}}\right)\right)\right| \left(1-\|\underline{\hat{z}}\|^2\right) \|\underline{\hat{z}}\|^{2n} \,\mathrm{d}\|\underline{\hat{z}}\|^2 \wedge \sigma_{n+1}\left(\underline{\hat{z}}\right) .$$

En posant $u = \|\underline{\hat{z}}\|^2$ , on obtient alors

$$\int_{B_{n+2}} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{z}\right)\right)\right| \mu_{n+2}\left(\underline{z}\right) = \frac{\pi^{n+2}}{n!} \int_0^1 \left(1-u\right) u^n \left(\int_{S_{n+1}\left(\sqrt{u}\right)} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{\hat{z}}\right)\right)\right| \sigma_{n+1}\left(\underline{\hat{z}}\right)\right) du .$$

Calculons $\int_{S_{n+1}\left(\sqrt{u}\right)} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{\hat{z}}\right)\right)\right| \sigma_{n+1}\left(\underline{\hat{z}}\right)$ .

En faisant le changement de variable $\underline{t} = \dfrac{\underline{\hat{z}}}{\sqrt{u}}$ ,

comme $P$ est homogène et que $\sigma_{n+1}\left(\underline{\hat{z}}\right) = \sigma_{n+1}\left(\underline{t}\right)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{S_{n+1}\left(\sqrt{u}\right)} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{\hat{z}}\right)\right)\right| \sigma_{n+1}\left(\underline{\hat{z}}\right) &= \int_{S_{n+1}} \log\left|\left(\sqrt{u}\right)^d \pi_v\left(P\left(\underline{t}\right)\right)\right| \sigma_{n+1}\left(\underline{t}\right) \\ &= \frac{d}{2} \int_{S_{n+1}} \log u.\sigma_{n+1}\left(\underline{t}\right) + \int_{S_{n+1}(1)} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{t}\right)\right)\right| \sigma_{n+1}\left(\underline{t}\right) \\ &= \frac{d}{2} \log u + \log M_v\left(P\right) - \frac{d}{2} \log\left(\gamma_n\right),\end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned}\int_{B_{n+2}} \log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{z}\right)\right)\right| \mu_{n+2}\left(\underline{z}\right) &= \frac{\pi^{n+2}}{n!} \int_0^1 \left(1-u\right) u^n \left(\frac{d}{2} \log u + \log M_v\left(P\right) - \frac{d}{2} \log\left(\gamma_n\right)\right) du \\ &= \frac{\pi^{n+2}}{n!} \left(\frac{d}{2} \int_0^1 \left(1-u\right) u^n \log u \, du + \left(\log M_v\left(P\right) - \frac{d}{2} \log\left(\gamma_n\right)\right) \int_0^1 \left(1-u\right) u^n \, du\right).\end{aligned}$$

Mais après un calcul intégral élémentaire qui donne :

$$\int_0^1 (1-u)u^n.du = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{et} \quad \int_0^1 (1-u)u^n \log u.du = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right),$$

on arrive à

$$\int_{B_{n+2}} \log\left|\pi_v\left(P(\underline{z})\right)\right| \mu_{n+2}(\underline{z}) = \frac{\pi^{n+2}d}{n!}\left(-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)+\left(\log\left(M_v(P)\cdot(\gamma_n)^{-\frac{d}{2}}\right)\right)\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$$
$$= \frac{\pi^{n+2}d}{2.(n+2)!}\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\frac{\pi^{n+2}}{(n+2)!}\left(\log\left(M_v(P).(\gamma_n)^{-\frac{d}{2}}\right)\right).$$

Et par conséquent,

$$\int_{S_{n+2}} \log\left|\pi_v\left(P(\underline{z})\right)\right| \sigma_{n+2}(\underline{z}) = \frac{d}{2}\left(-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\log\left(M_v(P).\gamma_n^{-\frac{d}{2}}\right)+\frac{d}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$
$$= \log\left(M_v(P).(\gamma_{n+1})^{-\frac{d}{2}}\right)$$

ce qui permet d'écrire

$$M_v(P) = \exp\left(\int_{S_{n+2}} \log\left|\pi_v\left(P(\underline{z})\right)\right| \sigma_{n+2}(\underline{z})\right)\cdot(\gamma_{n+1})^{\frac{d}{2}}$$

et de généraliser aisément par :

$$M_v(P) = \exp\left(\int_{S_{n+m+1}} \log\left|\pi_v\left(P(\underline{z})\right)\right| \sigma_{n+m+1}(\underline{z})\right)\cdot(\gamma_{n+m})^{\frac{d}{2}}. \ \square$$

## ***b - Résultats auxiliaires***

On aura besoin par la suite, d'utiliser la mesure de certains polynômes particuliers, qui est donnée par :

> ***Proposition 2.3*** - *Etant donnés deux polynômes $P$ et $Q$ de $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$.*
>
> *(i) Si $P$ est le polynôme constant $P(\underline{X}) = a$, alors*
>
> *pour tout place $v \in S$, on a $M_v(P) = |a|_v$ .*
>
> *(ii) Si $P$ est une forme linéaire du type $P(\underline{X}) = \sum_{i=0}^{n} a_i X_i$ , alors*
>
> *pour tout place $v \in S_\infty$, on a $M_v(P) = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} |a_i|_v^2} = \|a\|_v$ ,*
>
> *pour tout place $v \in S_p$, on a $M_v(P) = \max_{0 \le i \le n} |a_i|_v = \|a\|_v$ .*
>
> *(iii) Pour tout place $v \in S$, on a $M_v(P.Q) = M_v(P) \times M_v(Q)$ .*
>
> *(iv) Si $P$ est un polynôme du type $P(\underline{X}) = aX_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$ , alors*
>
> *pour tout place $v \in S$, on a $M_v(P) = |a|_v$ .*

*Démonstration :*

▪ *(i)* et *(iii)* découlent immédiatement de la définition de $M_v(P)$ et du Lemme de Gauss pour *(iii)* et $v \in S_p$.

▪ Pour *(ii)* , voir la *Proposition* **4** de [ P2 ].

▪ Pour *(iv)* ,

▪ si $v \in S_p$ la propriété est immédiate,

▪ si $v \in S_\infty$ la propriété découle de *(iii)*, et du fait que

$$\int_{S_{n+1}} \log\left|z_0^{\alpha_0}\right|_v \sigma_{n+1}(\underline{z}) = \int_{S_1} \log\left|z_0^{\alpha_0}\right|_v \sigma_1(z_0) - \frac{\alpha_0}{2}\log(\gamma_n).$$

car pour $z_0 \in S_1$ on a $|z_0|_v = 1$ qui entraîne $\int_{S_1} \log\left|z_0^{\alpha_0}\right|_v \sigma_1(z_0) = 0$,

et permet d'établir facilement la propriété *(iv)*. □

En utilisant les notations introduites dans le premier paragraphe, on peut énoncer la proposition suivante :

***Proposition 2.4*** - *Etant donné un polynôme homogène de degré $d$ de $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$, de la forme :*

$$P(\underline{X}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=d} a_{\underline{\alpha}} X_0^{\alpha_0} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$

▪ *pour tout place $v \in S_p$, on a*

$$M_v(P) = Max\left(\left|a_{\underline{\alpha}}\right|_v\right) = \|\underline{P}\|_v .$$

▪ *pour tout place $v \in S_\infty$, on a*

$$M_v(P) \le \left\|\omega_d^*(\underline{P})\right\|_v (\gamma_n)^{\psi(d)} \qquad et \qquad \left\|\omega_d^*(\underline{P})\right\|_v \le M_v(P)(n+1)^{\psi(d)} .$$

*Démonstration*

- Pour les places finies, l'égalité découle de la définition .
- Pour les places infinies,

  ▪ si $d = 1$, d'après la ***Proposition 2.3***, on a l'égalité $M_v(P) = \left\|\omega_1^*(\underline{P})\right\|_v$ qui donne les deux inégalités.

  ▪ si $d \ge 2$, montrons d'abord la première inégalité.

Comme $\left|P(\underline{z})\right|_v = \left|\left\langle \omega_d^*(\underline{P}) \mid \overline{\omega_d(\underline{z})}\right\rangle\right|_v$ , d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\left|P(\underline{z})\right|_v \le \left\|\omega_d^*(\underline{P})\right\|_v \times \sqrt{\sum_{|\underline{\alpha}|=d} \binom{d}{\underline{\alpha}} \left|z_0^{\alpha_0} \ldots z_n^{\alpha_n}\right|_v^2}$$

$$\le \left\|\omega_d^*(\underline{P})\right\|_v \times \left(\left|z_0\right|_v^2 + \left|z_1\right|_v^2 + \cdots + \left|z_n\right|_v^2\right)^{\frac{d}{2}} .$$

Mais pour $\underline{z} = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in S_{n+1}$ on a $\left|z_0\right|_v^2 + \cdots + \left|z_n\right|_v^2 = 1,$

ce qui entraîne, pour $\underline{z} \in S_{n+1}$, l'inégalité

$$\left|P(\underline{z})\right|_v \le \left\|\omega_d^*(\underline{P})\right\|_v .$$

En intégrant on obtient alors

$$\exp\left(\int_{S_{n+1}(1)} \log\left|\pi_v\left(P(\underline{z})\right)\right| \sigma_{n+1}(\underline{z})\right) \le \left\|\omega_d^*(\underline{P})\right\|_v ,$$

ce qui permet d'écrire l'inégalité souhaitée, à savoir

$$M_v(P) \le \left\|\omega_d^*(\underline{P})\right\|_v (\gamma_n)^{\frac{d}{2}} .$$

Montrons maintenant la seconde inégalité.

D'après le *Lemme* (**1.13**) de [ P1 ], on a le résultat suivant:

$$\left|a_{\underline{\alpha}}\right| \le \binom{d}{\underline{\alpha}} \exp\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 \log\left|\pi_v(P)\left(e^{2i\pi u_0}, \ldots, e^{2i\pi u_n}\right)\right| du_0 \ldots du_n\right) .$$

Or *P. Lelong* a montré dans le **Théorème 4** de [ Le1 ] , que

$$\exp\left(\int_0^1 \ldots \int_0^1 \log\left|\pi_v(P)\left(e^{2i\pi u_0}, \ldots, e^{2i\pi u_n}\right)\right| du_0 \ldots du_n\right)$$

$$\le \exp\left(\int_{S_{n+1}} \log\left|\pi_v\left(P(\underline{z})\right)\right| \sigma_{n+1}(\underline{z})\right) . (\gamma_n)^{\frac{d}{2}} ,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\left|a_{\underline{\alpha}}\right|_v \le \binom{d}{\underline{\alpha}} M_v(P) \qquad \text{et} \qquad \frac{\left|a_{\underline{\alpha}}\right|_v^2}{\binom{d}{\underline{\alpha}}} \le \binom{d}{\underline{\alpha}} . \left(M_v(P)\right)^2 ,$$

et en sommant pour tous les $\underline{\alpha}=(\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ tels que $|\underline{\alpha}|=d$,

$$\sum_{|\underline{\alpha}|=d}\frac{|a_{\underline{\alpha}}|_v^2}{\binom{d}{\underline{\alpha}}}\leq (M_v(P))^2(n+1)^d,$$

qui donne l'inégalité souhaitée, a savoir

$$\|\omega_d^*(\underline{\mathrm{P}})\|_v\leq (M_v(P))(n+1)^{\frac{d}{2}} \ . \ \square$$

***Nota bene***

▪ Si $d=1$, comme on a $\sqrt{\sum_{|\underline{\alpha}|=1}|a_{\underline{\alpha}}|_v^2}\leq\sum_{|\underline{\alpha}|=1}|a_{\underline{\alpha}}|_v\leq(n+1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\sum_{|\underline{\alpha}|=1}|a_{\underline{\alpha}}|_v^2}$ ,

cela donne

$$M_v(P)\leq\sum_{|\underline{\alpha}|=1}|a_{\underline{\alpha}}|_v\leq(n+1)^{\frac{1}{2}}M_v(P) \ .$$

▪ Si $d\geq 2$, l'inégalité $|a_{\underline{\alpha}}|_v\leq\binom{d}{\underline{\alpha}}M_v(P)$ sera utilisée dans le paragraphe suivant, elle nous permet aussi d'obtenir deux inégalités dont nous aurons besoin, obtenues en sommant sur toutes les valeurs de $\underline{\alpha}$ telles que $|\underline{\alpha}|=d$ , qui sont :

$$\sum_{|\underline{\alpha}|=d}|a_{\underline{\alpha}}|_v\leq(n+1)^d M_v(P) \qquad \text{et} \qquad \|\underline{\mathrm{P}}\|_v\leq(n+1)^d M_v(P) \ . \ \square$$

Nous aurons besoin par la suite des deux résultats suivants :

**Lemme 2.5 :** *Avec les notations introduites précédemment et avec $\hat{\underline{z}}=(z_0,\ldots,z_{i-1},z_{i+1},\ldots,z_n)$, on a les relations suivantes :*

$$\sigma_{n+1}(\underline{z})=n\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{|z_i|^2\,\|\hat{\underline{z}}\|^{2(n-1)}}{\|\underline{z}\|^{2(n+1)}}\mathrm{d}\|\hat{\underline{z}}\|^2\wedge\sigma_n(\hat{\underline{z}})\wedge\sigma_1(z_i)\right)$$

*(1)*

*et par conséquent*

$$\int_{S_{n+1}}Log|P(\underline{z})|_v\sigma_{n+1}(\underline{z})=n\sum_{i=0}^{n}\int_0^1(1-u)u^{n-1}\left(\int_{S_n(\sqrt{u})\times S_1(\sqrt{1-u})}\log|P(z)|_v\sigma_n(\hat{\underline{z}})\wedge\sigma_1(z_i)\right)du \ .$$

*(2)*

*Démonstration*

Comme $\left\|\underline{z}\right\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \left|z_i\right|^2$ , on aura $\mathrm{d^c} \left\|\underline{z}\right\|^2 = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{d^c} \left|z_i\right|^2$ .

La définition de $\sigma_{n+1}\left(\underline{z}\right)$ conduit donc à :

$$\sigma_{n+1}\left(\underline{z}\right) = \frac{n!}{\pi^n}\left(\frac{\sum_{i=0}^{n} \mathrm{d^c} \left|z_i\right|^2 \wedge \mu_n\left(\underline{z}\right)}{\left\|\underline{z}\right\|^{2(n+1)}}\right)$$

et comme

$$\mathrm{d^c} \left|z_i\right|^2 = \frac{\left(\bar{\partial} - \partial\right)\left(z_i \bar{z}_i\right)}{-4\mathrm{i}\pi} = \frac{z_i d\bar{z}_i - \bar{z}_i dz_i}{-4\mathrm{i}\pi} \qquad \text{et}$$

$$\mu_n\left(\underline{z}\right) = \frac{1}{\left(-2\mathrm{i}\right)^n n!}\left(\sum_{i=0}^{n} dz_i \wedge d\bar{z}_i\right)^{\wedge n}$$

on déduit

$$\mathrm{d^c} \left|z_i\right|^2 \wedge \mu_n\left(\underline{z}\right) = \frac{1}{\left(-2\mathrm{i}\right)^{n+1} 2\pi} \bigwedge_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \left(dz_j \wedge \bar{z}_j\right) \wedge \left(z_i d\bar{z}_i - \bar{z}_i dz_i\right),$$

ce qui, d'après le ***Lemme 2.2***, conduit à:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d^c} \left|z_i\right|^2 \wedge \mu_n\left(\underline{z}\right) &= \frac{\pi^{n-1}}{-4\mathrm{i}\left(n-1\right)!}\left\|\hat{\underline{z}}\right\|^{2(n-1)} \mathrm{d}\left\|\hat{\underline{z}}\right\|^2 \wedge \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right) \wedge \left(z_i d\bar{z}_i - \bar{z}_i dz_i\right) \\
&= \frac{\pi^n}{\left(n-1\right)!}\left\|\hat{\underline{z}}\right\|^{2(n-1)} \mathrm{d}\left\|\hat{\underline{z}}\right\|^2 \wedge \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right) \wedge \mathrm{d^c} \left|z_i\right|^2 \\
&= \frac{\pi^n}{\left(n-1\right)!}\left|z_i\right|^2 \left\|\hat{\underline{z}}\right\|^{2(n-1)} \mathrm{d}\left\|\hat{\underline{z}}\right\|^2 \wedge \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right) \wedge \sigma_1\left(z_i\right),
\end{aligned}$$

d'où la conclusion

$$\sigma_{n+1}\left(\underline{z}\right) = n\left(\sum_{i=0}^{n} \frac{\left|z_i\right|^2 \left\|\hat{\underline{z}}\right\|^{2(n-1)}}{\left\|\underline{z}\right\|^{2(n+1)}} \mathrm{d}\left\|\hat{\underline{z}}\right\|^2 \wedge \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right) \wedge \sigma_1\left(z_i\right)\right).$$

En posant $\left\|\hat{\underline{z}}\right\|^2 = u$ , on obtient immédiatement la relation *(2)*.□

***Lemme 2.6 .*** *Considérons pour* $n \geq 1$ *un polynôme homogène* $P$ *de* $K[X_0,\ldots,X_n]$ *de degré total* $d$ *et de degré* $d_i$ *en la variable* $X_i$ *, on a donc*

$$P(X_0,X_1,\ldots,X_n)=\sum_{k=0}^{d_i} P_{i,d-k}(X_0,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n)X_i^k$$

*avec*

$P_{i,d-k}\in K[X_0,\ldots,X_{i-1},X_{i+1},\ldots,X_n]$ *un polynôme homogène de degré total* $d-k$ *.*

*Pour tout entier* $k$ *tel que* $0\leq k\leq d_i$ *on a la relation :*

- *si* $v\in S_\infty$ *,*

$$M_v(P_{i,d-k})\leq\binom{d_i}{d_i-k}\times\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2j}\right)\right)^{d-k}\times\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}-\frac{n}{2(n+1)}\right)\right)^{k}$$
$$\times\left(\exp\left(n.\int_0^1\left((1-u)u^{n-1}.\int_{S_1(\sqrt{1-u})\times S_n(\sqrt{u})}\log|P(\underline{z})|_v\,\sigma_1(z_i)\wedge\sigma_n(\hat{\underline{z}})\right)du\right)\right)^{n+1}.$$

- *si* $v\in S_p$ *, de façon évidente*

$$M_v(P_{i,d-k})\leq M_v(P)\quad .$$

*Démonstration*

- Si $M_v(P_{i,d-k})=0$, la relation est vérifiée immédiatement.

- Si $M_v(P_{i,d-k})\neq 0$, ce qui entraîne $P_{i,d-k}\neq 0$, notons $(\hat{\underline{z}})=(z_0,\ldots,z_{i-1},z_{i+1},\ldots,z_n)$.

Pour $(\hat{\underline{z}})\in \mathbb{C}^n$ fixé, on a alors

$$P(X_i,\hat{\underline{z}})=\sum_{k=0}^{d_i}P_{i,d-k}(\hat{\underline{z}})X_i^k\ .$$

Le polynôme $P(X_i,\hat{\underline{z}})$ est un polynôme de $K[X_i]$ de degré $\delta_{\hat{\underline{z}}}$ , avec $\delta_{\hat{\underline{z}}}\leq d_i$.

Notons $\beta_j(\hat{\underline{z}})$ ses racines telles que : $\beta_j(\hat{\underline{z}})\neq 0$ pour $1\leq j\leq\delta_{\hat{\underline{z}}}-r$,

$\beta_j(\hat{\underline{z}})=0$ pour $\delta_{\hat{\underline{z}}}-r+1\leq j\leq\delta_{\hat{\underline{z}}}$ .

Posons $P(X_i,\hat{\underline{z}})=X_i^r.Q_i(X_i)$ tel que

$Q_i(X_i)=a_0(\hat{\underline{z}})X_i^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r}+a_1(\hat{\underline{z}})X_i^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r-1}+\cdots+a_{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r}(\hat{\underline{z}})$ avec $a_{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r}(\hat{\underline{z}})\neq 0$ et $a_0(\hat{\underline{z}})\neq 0$,

$$Q_i(X_i)=a_0(\hat{\underline{z}})\prod_{j=1}^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r}(X_i-\beta_j(\hat{\underline{z}})).$$

Soit un réel $\rho$ tel que $0 \le \rho \le 1$, d'après la formule de Jensen appliquée en $z_i = 0$, on obtient

$$\int_{S_1(\rho)} \log \left| \frac{Q_i(z_i)}{a_{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r}(\hat{\underline{z}})} \right|_v \sigma_1(z_i) = - \sum_{\substack{j=1 \\ |\beta_j| \le \rho}}^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r} \log \left| \frac{\beta_j(\hat{\underline{z}})}{\rho} \right|_v .$$

Et comme

$$\prod_{j=1}^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r} \left| \frac{\beta_j(\hat{\underline{z}})}{\rho} \right|_v = \left| \frac{a_{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r}(\hat{\underline{z}})}{a_0(\hat{\underline{z}})} \right|_v \times \rho^{r-\delta_{\hat{\underline{z}}}},$$

on a

$$- \sum_{\substack{j=1 \\ |\beta_j| \le \rho}}^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r} \log \left| \frac{\beta_j(\hat{\underline{z}})}{\rho} \right|_v = \log \left| \frac{a_0(\hat{\underline{z}})}{a_{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r}(\hat{\underline{z}})} \right|_v + \sum_{\substack{j=1 \\ |\beta_j|_v > \rho}}^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r} \log \left| \frac{\beta_j(\hat{\underline{z}})}{\rho} \right|_v + \left(\delta_{\hat{\underline{z}}} - r\right) \log \rho$$

d'où l'on déduit aisément

$$\begin{aligned} \int_{S_1(\rho)} \log \left| Q_i(z_i) \right|_v \sigma_1(z_i) &= \log \left| a_0(\hat{\underline{z}}) \right|_v + \sum_{\substack{j=1 \\ |\beta_j|_v > \rho}}^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r} \log \left| \frac{\beta_j(\hat{\underline{z}})}{\rho} \right|_v + \left(\delta_{\hat{\underline{z}}} - r\right) \log \rho \\ &= \log \left( \left| a_0(\hat{\underline{z}}) \right|_v \prod_{\substack{j=1 \\ |\beta_j|_v > \rho}}^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r} \left| \frac{\beta_j(\hat{\underline{z}})}{\rho} \right|_v \right) + \left(\delta_{\hat{\underline{z}}} - r\right) \log \rho . \end{aligned}$$

De plus, comme on a $|z_i|_v = \rho$ sur $S_1(\rho)$,

$$\int_{S_1(\rho)} \log \left| Q_i(z_i) \right|_v \sigma_1(z_i) + r \log \rho = \int_{S_1(\rho)} \log \left| P(z_i, \hat{\underline{z}}) \right|_v \sigma_1(z_i)$$

par conséquent

$$\exp\left( \int_{S_1(\rho)} \log \left| P(z_i, \hat{\underline{z}}) \right|_v \sigma_1(z_i) \right) = \left| a_0(\hat{\underline{z}}) \right|_v \prod_{\substack{j=1 \\ |\beta_j|_v > \rho}}^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r} \left| \frac{\beta_j(\hat{\underline{z}})}{\rho} \right|_v \times \rho^{\delta_{\hat{\underline{z}}}} .$$

D'autre part,

$$\left| a_h(\hat{\underline{z}}) \right|_v = \left| a_0(\hat{\underline{z}}) \right|_v \rho^h \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_h \le \delta_{\hat{\underline{z}}}-r} \left| \frac{\beta_{j_1}(\hat{\underline{z}})}{\rho} \cdots \frac{\beta_{j_h}(\hat{\underline{z}})}{\rho} \right|_v \le \left| a_0(\hat{\underline{z}}) \right|_v \binom{\delta_{\hat{\underline{z}}} - r}{h} \prod_{\substack{j=1 \\ |\beta_j|_v > \rho}}^{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r} \left| \frac{\beta_j(\hat{\underline{z}})}{\rho} \right|_v \rho^h$$

ce qui entraîne

$$\left| a_h(\hat{\underline{z}}) \right|_v \le \binom{\delta_{\hat{\underline{z}}} - r}{h} \exp\left( \int_{S_1(\rho)} \log \left| P(z_i, \hat{\underline{z}}) \right|_v \sigma_1(z_i) \right) \rho^{h-\delta_{\hat{\underline{z}}}}.$$

De plus, comme $a_h(\hat{\underline{z}}) = P_{i,d-\delta_{\hat{\underline{z}}}+h}(\hat{\underline{z}})$, on a

$$\left|P_{i,d-k}\left(\hat{\underline{z}}\right)\right|_v \le \binom{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r}{\delta_{\hat{\underline{z}}}-k}\exp\left(\int_{S_1(\rho)}\log\left|P\left(z_i,\hat{\underline{z}}\right)\right|_v \sigma_1\left(z_i\right)\right)\rho^{-k}.$$

On remarque que les réels $r$ et $\delta_{\hat{\underline{z}}}$ dépendent de $\hat{\underline{z}}$, on majorera donc

$$\binom{\delta_{\hat{\underline{z}}}-r}{\delta_{\hat{\underline{z}}}-k} \le \binom{d_i}{d_i-k} \quad .$$

On peut donc écrire pour tout $\left(\hat{\underline{z}}\right) \in \mathbb{C}^n$, et pour tout entier $k$ avec $0 \le k \le d_i$,

$$\left|P_{i,d-k}\left(\hat{\underline{z}}\right)\right|_v \le \binom{d_i}{d_i-k}\exp\left(\int_{S_1(\rho)}\log\left|P\left(z_i,\hat{\underline{z}}\right)\right|_v \sigma_1\left(z_i\right)\right)\rho^{-k}.$$

En posant $\rho = \sqrt{1-u}$ et en intégrant sur la sphère $S_n\left(\sqrt{u}\right)$, on obtient alors

$$\int_{S_n\left(\sqrt{u}\right)}\log\left|P_{i,d-k}\left(\hat{\underline{z}}\right)\right|_v \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right) \le \log\binom{d_i}{d_i-k} + \int_{S_n\left(\sqrt{u}\right)\times S_1\left(\sqrt{1-u}\right)}\log\left|P\left(\underline{z}\right)\right|_v \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right)\wedge\sigma_1\left(z_i\right) - \frac{k}{2}\log\left(1-u\right).$$

Comme $P_{i,d-k}$ est un polynôme homogène de degré $d-k$, on a

$$\int_{S_n}\log\left|P_{i,d-k}\left(\hat{\underline{z}}\right)\right|_v \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right) + \frac{d-k}{2}\log\left(u\right) = \int_{S_n\left(\sqrt{u}\right)}\log\left|P_{i,d-k}\left(\hat{\underline{z}}\right)\right|_v \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right)$$

ce qui conduit à

$$\int_{S_n}\log\left|P_{i,d-k}\left(\hat{\underline{z}}\right)\right|_v \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right) + \frac{d-k}{2}\log\left(u\right)$$
$$\le \log\binom{d_i}{d_i-k} + \int_{S_n\left(\sqrt{u}\right)\times S_1\left(\sqrt{1-u}\right)}\log\left|P\left(\underline{z}\right)\right|_v \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right)\wedge\sigma_1\left(z_i\right) - \frac{k}{2}\log\left(1-u\right)$$

ou encore

$$\log\left(M_v\left(P_{i,d-k}\right)\right) + \frac{d-k}{2}\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j} + \log\left(u\right)\right)$$
$$\le \log\binom{d_i}{d_i-k} + \int_{S_n\left(\sqrt{u}\right)\times S_1\left(\sqrt{1-u}\right)}\log\left|P\left(\underline{z}\right)\right|_v \sigma_n\left(\hat{\underline{z}}\right)\wedge\sigma_1\left(z_i\right) - \frac{k}{2}\log\left(1-u\right)$$

$$\int_0^1 (1-u)u^{n-1}\left(\log\left(M_v\left(P_{i,d-k}\right)\right)+\frac{d-k}{2}\left(-\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{j}+\log(u)\right)\right)du$$

$$\leq \int_0^1 (1-u)u^{n-1}\left(\log\binom{d_i}{d_i-k}+\int_{S_n\left(\sqrt{u}\right)\times S_1\left(\sqrt{1-u}\right)}\log\left|P(\underline{z})\right|_v \sigma_n(\hat{\underline{z}})\wedge\sigma_1(z_i)-\frac{k}{2}\log(1-u)\right)du\ .$$

Après des calculs élémentaires d'intégrales qui nous donnent les résultats suivants:

- $\int_0^1 (1-u)u^{n-1}.du=\frac{1}{n(n+1)}$
- $\int_0^1 (1-u)u^{n-1}\log u.du=-(2n+1)\frac{1}{\left[n(n+1)\right]^2}$
- $\int_0^1 (1-u)u^{n-1}\log(1-u).du=-\frac{1}{n(n+1)}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\right)+\frac{1}{(n+1)^2}$ ,

on obtient

$$M_v\left(P_{i,d-k}\right)\leq\binom{d_i}{d_i-k}\times\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2j}\right)\right)^{d-k}\times\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2j}-\frac{n}{2(n+1)}\right)\right)^{k}$$

$$\times\left(\exp\left(n.\int_0^1\left((1-u)u^{n-1}.\int_{S_n\left(\sqrt{u}\right)\times S_1\left(\sqrt{1-u}\right)}\log\left|P(\underline{z})\right|_v \sigma_n(\hat{\underline{z}})\wedge\sigma_1(z_i)\right)du\right)\right)^{n+1}.\square$$

### *c - Mesure d'un polynôme multihomogène*

Soient $K\left[\underline{X}^{(1)},\underline{X}^{(2)},\ldots,\underline{X}^{(r)}\right]$ l'anneau des polynômes d'indéterminées $X_0^{(j)},X_1^{(j)},\ldots,X_{n_j}^{(j)}$ avec $j=1,\ldots,r$ et à coefficients dans $K$ et $P$ un élément de cet anneau, homogène par rapport à chaque groupe de variables $\underline{X}^{(j)}$ de degré $d^{\circ}_{\underline{X}^{(j)}}$ pour ce groupe de variables.

**Définition 2.7** - La *mesure de $P$ en la place $v$*, que l'on notera $M_v^{(r)}(P)$, est le nombre défini de la façon suivante :

- si $v\in S_p$, $M_v^{(r)}(P)$ est le maximum des valeurs absolues $v$-adiques des coefficients du polynôme $\pi_v(P)$, c'est aussi le maximum des valeurs absolues $v$-adiques des coefficients du polynôme $P$.

- si $v\in S_\infty$, la mesure $M_v^{(r)}(P)$ du polynôme $P$, est définie par :

  - si $P=0$ alors $M_v^{(r)}(P)=0$,

  - si $P\neq 0$ alors

$$M_v^{(r)}(P)=\exp\left(\int_{S_{n_1+1}\times\cdots\times S_{n_r+1}}\log\left|\pi_v\left(P\left(\underline{z}^{(1)},\ldots,\underline{z}^{(r)}\right)\right)\right|\sigma_{n_1+1}\left(\underline{z}^{(1)}\right)\wedge\ldots\wedge\sigma_{n_r+1}\left(\underline{z}^{(r)}\right)\right)\times\prod_{j=1}^{r}\left(\gamma_{n_j}\right)^{\frac{d^{\circ}_{\underline{z}^{(j)}}P}{2}}$$

où $S_{n_j+1}$ est la sphère unité de $\mathbb{C}_v^{n_j+1}$ et $\sigma_{n_j+1}\left(\underline{z}^{(j)}\right)$ est la mesure invariante de masse totale 1 sur $S_{n_j+1}$ pour $j=1,\ldots,r$.

Cette définition n'est qu'une généralisation de la ***définition 2.1***.

## 2 - Hauteur d'un polynôme

Nous reprendrons les définitions proposées dans [ P1 ] par *P. Philippon*, c'est-à-dire: Soient $K\left[X_0, X_1, \ldots, X_n\right]$ l'anneau des polynômes d'indéterminées $X_0, X_1, \ldots, X_n$ à coefficients dans $K$ et $P$ un élément homogène de degré $d$ de cet anneau.

**Définition 2.8 -**
▪ La *hauteur invariante de $P$,* que l'on notera $\mathrm{h}(P)$, est le nombre réel défini de la façon suivante :

· si $P=0$ alors $\mathrm{h}(P)=0$,

· si $P\neq 0$ alors $\mathrm{h}(P)=\dfrac{1}{[K:\mathrm{Q}]}.\sum_v n_v.\log M_v(P)$.

▪ La *hauteur de $P$,* que l'on notera $\overline{\mathrm{h}}(P)$, est le nombre réel défini de la façon suivante :

· si $P=0$ alors $\overline{\mathrm{h}}(P)=0$,

· si $P\neq 0$ alors $\overline{\mathrm{h}}(P)=\dfrac{1}{[K:\mathrm{Q}]}.\sum_v n_v.Max\left(0,\log M_v(P)\right)$.

Remarque

Pour une forme linéaire du type $P(\underline{\mathrm{X}})=\sum_{i=0}^{n} a_i X_i$ et $\underline{\mathrm{a}}=\left(a_0, a_1, \ldots, a_n\right)$, comme

▪ pour $v\in S_\infty$, $\qquad \|\underline{\mathbf{a}}\|_v=\sqrt{\sum_{i=0}^{n}|a_i|_v^2}$ ,

▪ pour $v\in S_p$, $\qquad \|\underline{\mathbf{a}}\|_v=\max_{0\leq i\leq n}|a_i|_v$ ,

d'après la ***Proposition 2.3*** on obtient

$$\mathrm{h}(P)=\frac{1}{[K:\mathrm{Q}]}.\sum_v n_v.\log\left(\|\underline{\mathbf{a}}\|_v\right)\ .\ \square$$

Nous aurons aussi besoin par la suite de certaines des propriétés suivantes, qui correspondent à celles exposées dans [ P1 ] dans la *Proposition* (**1.12**) :

**Proposition 2.9** - *Etant donnés un élément $\lambda$ de $K^*$ et deux polynômes homogènes $P$ et $Q$ de* $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ , on a :

- *(i)* $\mathrm{h}(\lambda) = 0$,
- *(ii)* $\mathrm{h}(P) \le \overline{\mathrm{h}}(P)$,
- *(iii)* $\mathrm{h}(P.Q) = \mathrm{h}(P) + \mathrm{h}(Q)$ *et* $\overline{\mathrm{h}}(P.Q) \le \overline{\mathrm{h}}(P) + \overline{\mathrm{h}}(Q)$,
- *(iv)* $\overline{\mathrm{h}}(P) \le \overline{\mathrm{h}}(P.Q) + \overline{\mathrm{h}}(Q) - \mathrm{h}(Q)$,
- *(v)* $\mathrm{h}(P) \ge 0$ *et* $\overline{\mathrm{h}}(P) \ge 0$,
- *(vi) pour toute place* $v$ , $M_v(P) \ge \exp\left( -\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v} . \overline{\mathrm{h}}(P) \right)$,
- *(vii) il existe* $\mu = \mu(P) \in \overline{K}^*$ *tel que* $\overline{\mathrm{h}}(\mu P) = \mathrm{h}(\mu P) = \mathrm{h}(P)$.

*Démonstration*

- Pour la démonstration de *(i), (ii) et (iii),* il suffit, comme c'est indiqué dans [ P1 ] d'utiliser les définitions, la formule du produit et la multiplicativité de la mesure d'un polynôme.

- Pour *(iv)*, on peut remarquer que pour deux réels quelconques $a$ et $b$ , on a:

$$\max(0,a) + b \le \max(0,b) + \max(0,a+b).$$

Ce qui nous permet de déduire immédiatement la propriété *(iv)*.

- Pour *(v)*, nous allons faire un raisonnement par récurrence sur $n$ .

▪ Pour $n = 0$ ,

$$P(X_0) = a_d X_0^d .$$

Pour toute place $v$ , on a :

$$\log(|a_d|_v) = \log(M_v(P)).$$

En sommant sur toutes les places et en utilisant la formule du produit, on obtient alors

$$\mathrm{h}(P) = 0 .$$

▪ Pour $n > 0$ ,

$P(\underline{\mathrm{X}})$ est un polynôme de degré $d_i$ en la variable $X_i$ pour un $i$ fixé tel que $0 \le i \le n$ .

Comme la hauteur d'un monôme est nulle, quitte à diviser $P(\underline{\mathrm{X}})$ par un monôme on peut supposer sans perte de généralité, que pour $i = 0, \ldots, n$ on a $P_{/X_i=0} \ne 0$ .

En appliquant le résultat du ***Lemme 2.6*** au polynôme $P(\underline{X})$ avec $k=0$, nous pouvons écrire pour toute place infinie $v$ :

$$M_v\left(P_{/X_i=0}\right) \leq$$
$$\left(\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{2j}\right)\right)^d \times \left(\exp\left(n.\int_0^1\left((1-u)u^{n-1}.\int_{S_n(\sqrt{u})\times S_1(\sqrt{1-u})}\log\left|P_i(\underline{z})\right|_v \sigma_n(\hat{\underline{z}})\wedge\sigma_1(z_i)\right)du\right)\right)\right)^{n+1}.$$

Ce qui en appliquant le ***Lemme 2.5*** entraîne pour toute place $v$

$$\prod_{i=0}^{n} M_v\left(P_{/X_i=0}\right) \leq \left(M_v(P)\right)^{n+1}$$

et par conséquent

$$\sum_{i=0}^{n}\log\left(M_v\left(P_{/X_i=0}\right)\right) \leq (n+1)\log\left(M_v(P)\right).$$

En sommant pour toutes les places , on obtient donc:

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{h}\left(P_{/X_i=0}\right) \leq (n+1)\,\mathrm{h}(P).$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on a $0 \leq \mathrm{h}\left(P_{/X_i=0}\right)$, ce qui nous permet d'obtenir la première inégalité de *(v)* et par conséquence de *(ii)* la seconde inégalité de *(v)*.

- *Démonstration de (vi).*

  - Si $M_v(P) \geq 1$, le résultat est évident.

  - Si $M_v(P) < 1$, d'après l'inégalité *(v)*, on a

$$\sum_{w} n_w.\log M_w(P) \geq 0,$$

donc

$$n_v.\log M_v(P) \geq -\sum_{w\neq v} n_w.\log M_w(P)$$
$$\geq -\sum_{w\neq v} n_w.\max\left(0,\log M_w(P)\right)$$

mais comme

$$\log M_v(P) < 0, \quad \text{on a} \quad \max\left(0,\log M_v(P)\right) = 0,$$

ce qui permet d'écrire

$$n_v.\log M_v(P) \geq -\sum_w n_w.\max\left(0,\log M_w(P)\right)$$
$$\geq -[K:\mathbb{Q}].\overline{\mathrm{h}}(P)$$

et de conclure la démonstration de l'inégalité *(vi)*.

- *Démonstration de (vii).*

On procède par récurrence sur $n$ et pour les mêmes raisons que dans la propriété *(v)*, on peut supposer que pour $i = 0,\dots,n$ on a $P_{/X_i=0} \neq 0$ .

La propriété *(vii)* est bien évidemment vraie pour $n = 0$ .
Supposons qu'elle soient vraie pour $n-1$ ($n > 0$).
Pour $i = 0,\dots,n$ , il existe alors $\mu_i \in \overline{K}^*$ tel que $\overline{\mathrm{h}}\left(\mu_i.P_{/X_i=0}\right) = \mathrm{h}\left(P_{/X_i=0}\right)$ , ce qui signifie que pour toute place $v$ de $K(\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_n)$ on a $M_v\left(\mu_i.P_{/X_i=0}\right) \geq 1$ .

Posons $\mu = (\mu_0.\mu_1.\dots.\mu_n)^{\frac{1}{n+1}} \in \overline{K}^*$ , alors pour toute place $v$ de $K(\mu_0,\mu_1,\dots,\mu_n,\mu)$ , on a

$$1 \leq \prod_{i=0}^{n} M_v\left(\mu_i.P_{/X_i=0}\right) \leq |\mu|_v^{n+1}.\left(M_v(P)\right)^{n+1} = \left(M_v(\mu P)\right)^{n+1}.$$

Ceci entraîne alors l'existence d'un élément $\mu \in \overline{K}^*$ tel que

$$\overline{\mathrm{h}}(\mu P) = \mathrm{h}(P) \quad . \square$$

## 3 - Hauteur d'une variété projective

Soit $V$ une sous-variété de dimension $r-1$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ définie sur un corps de nombres $K$ dont l'idéal de définition dans $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ est un idéal premier $\mathfrak{I}$ de rang $n-r$.

Soit $f$ une forme éliminante d'indice $\underline{\mathrm{d}} = (d_1, \ldots, d_r)$ de l'idéal $\mathfrak{I}$ et $f_v$ l'application définie dans le premier paragraphe , à savoir :

$$f_v\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}, \underline{\mathrm{u}}^{(2)}, \ldots, \underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right) = \begin{cases} f\left(\tilde{\omega}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}, \underline{\mathrm{u}}^{(2)}, \ldots, \underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right)\right) & \text{si la place } v \text{ est infinie} \\ f\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}, \underline{\mathrm{u}}^{(2)}, \ldots, \underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right) & \text{si la place } v \text{ est finie} \end{cases} .$$

### *a - Mesure d'une forme éliminante*

**Définition 2.10** - La *mesure de la forme éliminante* $f$ *en la place* $v$ est le nombre $M_v^{(r)}(f_v)$, où $M_v^{(r)}$ est la mesure d'un polynôme multihomogène.

***Remarques***

Dans le cas d'une place infinie, si l'on considère les ellipsoïdes $E_{N_j+1}$ de $\mathrm{P}_{N_j}(\mathrm{C})$

d'équations $\displaystyle\sum_{|\underline{\alpha}|=d_j} \frac{\left(v_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right)^2}{\binom{d_j}{\underline{\alpha}}} = 1$ , et le changement de variables défini par $\tilde{\omega}_{d_j}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(j)}\right) = \underline{\mathrm{v}}^{(j)}$ ,

alors pour $\underline{\mathrm{u}}^{(j)} \in S_{N_j+1}$ on a :

$$\underline{\mathrm{v}}^{(j)} \in E_{N_j+1} \qquad \text{et} \qquad \sigma_{N_j+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(j)}\right) = \left(\prod_{|\underline{\alpha}|=d_j} \binom{d_j}{\underline{\alpha}}^{-1}\right) \sigma_{N_j+1}\left(\underline{\mathrm{v}}^{(j)}\right).$$

En prenant comme mesure $\tilde{\sigma}_{N_j+1}\left(\underline{\mathrm{v}}^{(j)}\right) = \left(\displaystyle\prod_{|\underline{\alpha}|=d_j} \binom{d_j}{\underline{\alpha}}^{-1}\right) . \sigma_{N_j+1}\left(\underline{\mathrm{v}}^{(j)}\right)$

cela entraîne

$$\int_{S_{N_1+1}\times\cdots\times S_{N_r+1}} \log\left|\pi_v\left(f\left(\tilde{\omega}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right)\right)\right)\right)\right| \sigma_{N_1+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right) \wedge \ldots \wedge \sigma_{N_r+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right) =$$

$$\int_{E_{N_1+1}\times\cdots\times E_{N_r+1}} \log\left|\pi_v\left(f\left(\underline{\mathrm{v}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathrm{v}}^{(r)}\right)\right)\right| \tilde{\sigma}_{N_1+1}\left(\underline{\mathrm{v}}^{(1)}\right) \wedge \ldots \wedge \tilde{\sigma}_{N_r+1}\left(\underline{\mathrm{v}}^{(r)}\right) .$$

***Exemples***

1) Si $V$ est une sous-variété de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ de dimension $0$, c'est-à-dire un point de représentant $\underline{\mathrm{x}} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K^{n+1}$, son idéal de définition a pour forme éliminante d'indice $d_1$

$$f\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right) = \sum_{|\underline{\alpha}|=d_1} u_{\underline{\alpha}}^{(1)} \underline{\mathrm{x}}^{\underline{\alpha}} \qquad \text{et} \qquad f\left(\tilde{\omega}_{d_1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\right) = \sum_{|\underline{\alpha}|=d_1} \binom{d_1}{\underline{\alpha}}^{\frac{1}{2}} u_{\underline{\alpha}}^{(1)} \underline{\mathrm{x}}^{\underline{\alpha}}$$

et par conséquent d'après la ***Proposition 2.2*** :

$$M_v^{(1)}(f_v) = \begin{cases} \sqrt{\displaystyle\sum_{|\underline{\alpha}|=d_1} \binom{d_1}{\underline{\alpha}} \left|\underline{\mathrm{x}}^{\underline{\alpha}}\right|_v^2} = \|\underline{\mathrm{x}}\|_v^{d_1} & \text{pour une place } v \text{ infinie} \\ \displaystyle\max_{|\underline{\alpha}|=d_1} \left|\underline{\mathrm{x}}^{\underline{\alpha}}\right|_v = \|\underline{\mathrm{x}}\|_v^{d_1} & \text{pour une place } v \text{ finie .} \end{cases}$$

2) Considérons l'espace projectif $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$. Une forme éliminante d'indice $(1,\ldots,1) \in \mathrm{N}^{n+1}$ de $\mathrm{P}_n$ est :

$$f_n = \det \begin{pmatrix} u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & \cdots & u_n^{(1)} \\ u_0^{(2)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(n+1)} & u_1^{(n+1)} & \cdots & u_n^{(n+1)} \end{pmatrix} .$$

Montrons que pour une place infinie $v$ la mesure de $f_n$ est :

$$M_v^{(n+1)}(f_n) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{n+1-i}{2i}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\right) .$$

Pour cela nous allons établir le fait suivant :

> ***Lemme 2.11 :*** *Etant donné un polynôme homogène $P$ de degré $d$ de $\mathrm{C}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$, on a :*
>
> $$\int_{S_{n+1}} \log\left|P(\underline{\mathrm{z}})\right|_v . \sigma_{n+1}(\underline{\mathrm{z}}) = \int_{\mathrm{P}_n} \log\left(\frac{\left|P(\underline{\mathrm{x}})\right|_v}{\|\underline{\mathrm{x}}\|_v^d}\right) . \Omega(\underline{\mathrm{x}})^{\wedge n} .$$

*Démonstration*

Considérons chaque élément de $\mathrm{P}_n$ représenté par $\underline{\mathrm{x}} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tel que $\|\underline{\mathrm{x}}\|_v = 1$ et les fibres $\{\lambda \underline{\mathrm{x}}\}_{\lambda \in \mathrm{C}^*}$ de $\pi : \mathrm{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathrm{P}_n$ . Les éléments de chaque fibre appartenant à $S_{n+1}$ sont donc du type $\underline{\mathrm{z}} = \lambda \underline{\mathrm{x}}$ avec $|\lambda|_v = 1$ c'est-à-dire $\lambda \in S_1$ .

Exprimons alors la mesure $\sigma_{n+1}(\underline{\mathrm{z}})$ en fonction de $\sigma_1(\lambda)$ et de $\Omega(\underline{\mathrm{x}})^{\wedge n}$ , où

$$\sigma_{n+1}(\underline{\mathrm{z}}) = \frac{n!}{\pi^n} \cdot \frac{\mathsf{d}^c \|\underline{\mathrm{z}}\|^2 \wedge \mu_n(\underline{\mathrm{z}})}{\|\underline{\mathrm{z}}\|^2} = \frac{n!}{\pi^n} \cdot \mathsf{d}^c \|\underline{\mathrm{z}}\|^2 \wedge \mu_n(\underline{\mathrm{z}}) \text{ sur } S_{n+1} ,$$

$$\sigma_1(\lambda) = \frac{\mathsf{d}^c |\lambda|}{|\lambda|^2} = \mathsf{d}^c |\lambda| \qquad \text{sur } S_1 \qquad \text{et} \qquad \Omega(\underline{\mathrm{x}}) = \frac{1}{2i\pi} \partial\overline{\partial} \log\left(\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\right) .$$

Comme $\mu_n = \dfrac{1}{n!(-2i)^n}\left(\partial\overline{\partial}\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\right)^{\wedge n}$ alors $\sigma_{n+1}(\underline{\mathrm{z}}) = \dfrac{1}{(-2i\pi)^n} \mathsf{d}^c \|\underline{\mathrm{z}}\|^2 \wedge \left(\partial\overline{\partial}\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\right)^{\wedge n}$ .

De plus $\underline{\mathrm{z}} = \lambda \underline{\mathrm{x}}$ , avec $\|\underline{\mathrm{x}}\| = 1$ et $|\lambda| = 1$, ce qui donne sur $S_1 \times \mathrm{P}_n(\mathrm{C})$

$$\partial\overline{\partial}\|\underline{\mathrm{z}}\|^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right) + d\lambda \wedge d\overline{\lambda} + \overline{\lambda} d\lambda \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i\right) - \lambda d\overline{\lambda} \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i\right)$$

$$\begin{aligned}
\left(\partial\overline{\partial}\|\underline{\mathrm{z}}\|^2\right)^{\wedge n} &= \left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge n} \\
&\quad + n\left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge(n-1)} \wedge \left(d\lambda \wedge d\overline{\lambda} + \overline{\lambda} d\lambda \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i\right) - \lambda d\overline{\lambda} \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i\right)\right) \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge(n-2)} \wedge \left(d\lambda \wedge d\overline{\lambda} \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i\right)\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathsf{d}^c \|\underline{\mathrm{z}}\|^2 &= \frac{1}{-4i\pi}\left(\overline{\partial} - \partial\right)\|\underline{\mathrm{z}}\|^2 \\
&= \frac{1}{-4i\pi}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i - \sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i + \lambda d\overline{\lambda} - \overline{\lambda} d\lambda\right) \\
&= \mathsf{d}^c \|\underline{\mathrm{x}}\|^2 + \mathsf{d}^c |\lambda|^2
\end{aligned}$$

par suite

$$\mathrm{d^c}\,\|\underline{z}\|^2 \wedge \left(\partial\overline{\partial}\,\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n} = \mathrm{d^c}\,\|\underline{z}\|^2 \wedge \Bigg[\left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge n}$$

$$+n\left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge(n-1)} \wedge \left(d\lambda \wedge d\overline{\lambda} + \overline{\lambda}\, d\lambda \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i\right) - \lambda d\overline{\lambda} \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i\right)\right)$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge(n-2)} \wedge \left(d\lambda \wedge d\overline{\lambda} \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i\right)\right)\Bigg].$$

Comme d'autre part seules les formes $(n,n)$ en $\underline{x}$ et $(1,0)$ ou $(0,1)$ en $\lambda$ ont une influence dans l'intégration, en développant $\mathrm{d^c}\,\|\underline{z}\|^2 \wedge \left(\partial\overline{\partial}\,\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n}$ et en ne gardant que ces formes on obtient :

$$\mathrm{d^c}\,\|\underline{z}\|^2 \wedge \left(\partial\overline{\partial}\,\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n} = \mathrm{d^c}\,|\lambda|^2 \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge n}$$

$$+\frac{n}{-4i\pi}\left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge(n-1)} \wedge \left(\overline{\lambda}\, d\lambda \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i\right) - \lambda d\overline{\lambda} \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i\right)\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i - \sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i\right)$$

$$\mathrm{d^c}\,\|\underline{z}\|^2 \wedge \left(\partial\overline{\partial}\,\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n} = \mathrm{d^c}\,|\lambda|^2 \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)$$

$$-n\left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge(n-1)} \wedge \mathrm{d^c}\,|\lambda|^2 \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i\right)$$

$$\mathrm{d^c}\,\|\underline{z}\|^2 \wedge \left(\partial\overline{\partial}\,\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n} = \mathrm{d^c}\,|\lambda|^2 \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge(n-1)} \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i - n\left(\sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i\right)\right)$$

et par conséquent

$$\sigma_{n+1}(\underline{z}) = \frac{1}{(-2i\pi)^n}\,\mathrm{d^c}\,|\lambda|^2 \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i\right)^{\wedge(n-1)} \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\overline{x}_i - n\left(\sum_{i=0}^{n} \overline{x}_i dx_i\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\overline{x}_i\right)\right).$$

Considérons maintenant la mesure $\Omega(\underline{x})^{\wedge n}$ .

$$\Omega(\underline{x})^{\wedge n} = \left(\frac{\partial\overline{\partial}\log\|\underline{x}\|^2}{-2i\pi}\right)^{\wedge n} = \frac{1}{(-2i\pi)^n}\left(\frac{\partial\overline{\partial}\,\|\underline{x}\|^2}{\|\underline{x}\|^2}\right)^{\wedge(n-1)} \wedge \left(\frac{\partial\overline{\partial}\,\|\underline{x}\|^2}{\|\underline{x}\|^2} - n\frac{\partial\,\|\underline{x}\|^2 \wedge \overline{\partial}\,\|\underline{x}\|^2}{\|\underline{x}\|^4}\right),$$

ce qui pour $\|\underline{\mathrm{x}}\|^2 = 1$ , donne

$$\Omega(\underline{\mathrm{x}})^{\wedge n} = \left(\frac{\partial\bar{\partial}\log\|\underline{\mathrm{x}}\|^2}{-2i\pi}\right)^{\wedge n} = \frac{1}{(-2i\pi)^n}\left(\partial\bar{\partial}\|\underline{\mathrm{x}}\|^2\right)^{\wedge(n-1)} \wedge \left(\partial\bar{\partial}\|\underline{\mathrm{x}}\|^2 - n\partial\|\underline{\mathrm{x}}\|^2 \wedge \bar{\partial}\|\underline{\mathrm{x}}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{(-2i\pi)^n}\left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\bar{x}_i\right)^{\wedge(n-1)} \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} dx_i \wedge d\bar{x}_i - n\left(\sum_{i=0}^{n}\bar{x}_i dx_i\right) \wedge \left(\sum_{i=0}^{n} x_i d\bar{x}_i\right)\right)$$

et finalement

$$\sigma_{n+1}(\underline{\mathrm{z}}) = \mathrm{d^c}\,|\lambda|^2 \wedge \Omega(\underline{\mathrm{x}})^{\wedge n} \quad .$$

Par conséquent ,

$$\int_{S_{n+1}} \log|P(\underline{\mathrm{z}})|_v . \sigma_{n+1}(\underline{\mathrm{z}}) = \int_{S_1 \times \mathrm{P}_n} \log\left|\lambda^d . P(\underline{\mathrm{x}})\right|_v . \mathrm{d^c}\,|\lambda|^2 \wedge \Omega(\underline{\mathrm{x}})^{\wedge n}$$

$$= \int_{S_1 \times \mathrm{P}_n} \left(d\log|\lambda|_v + \log|P(\underline{\mathrm{x}})|_v\right) . \sigma_1(\lambda) \wedge \Omega(\underline{\mathrm{x}})^{\wedge n}$$

mais comme $|\lambda|_v = 1$ , cela entraîne

$$\int_{S_{n+1}} \log|P(\underline{\mathrm{z}})|_v . \sigma_{n+1}(\underline{\mathrm{z}}) = \int_{\mathrm{P}_n}\left(\int_{S_1} \sigma_1(\lambda)\right) \log|P(\underline{\mathrm{x}})|_v \Omega(\underline{\mathrm{x}})^{\wedge n}$$

$$= \int_{\mathrm{P}_n} \log|P(\underline{\mathrm{x}})|_v \, \Omega(\underline{\mathrm{x}})^{\wedge n}$$

et achève la démonstration de ce lemme. ☐

Revenons à la mesure de la forme éliminante $f_n$ d'indice $(1,\dots,1) \in \mathrm{N}^{n+1}$ de $\mathrm{P}_n$ .

Si l'on considère la spécialisation définie par $\rho\left(u_n^{(n+1)}\right) = 1$ et $\rho\left(u_j^{(n+1)}\right) = 0$ pour $j = 0,\dots,n-1$,

$$\rho(f_n) = f_{n-1} = \det\begin{pmatrix} u_0^{(1)} & u_1^{(1)} & \cdots & u_{n-1}^{(1)} \\ u_0^{(2)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_{n-1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_0^{(n)} & & \cdots & u_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix}$$ est une forme éliminante d'indice $(1,\dots,1) \in \mathrm{N}^n$

de $\mathrm{P}_{n-1}$ .

D'après le **corollaire 4** de [ P2 ] , on peut écrire :

$$\int_{S_{n+1}\times\cdots\times S_{n+1}} \log\left|\frac{f_{n-1}}{f_n}\right|_v .\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\wedge\cdots\wedge\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(n+1)}\right) = \int_{\mathrm{P}_n} \log\left(\frac{|z_0|_v}{\|\underline{z}\|_v}\right).\Omega(\underline{z})^{\wedge n} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}$$

Mais d'après le Lemme précédent , on peut écrire :

$$\int_{\mathrm{P}_n} \log\left(\frac{|z_0|_v}{\|\underline{z}\|_v}\right).\Omega(\underline{z})^{\wedge n} = \int_{S_{n+1}} \log\left(|z_0|_v\right).\sigma_{n+1}(\underline{z}) \ .$$

Comme $P(\underline{z}) = z_0$ ne dépend pas de $z_1,\ldots,z_n$ , on peut écrire, suite à la remarque faite après la **définition 2.1**,

$$\int_{S_{n+1}} \log\left(|z_0|_v\right).\sigma_{n+1}(\underline{z}) = \int_{S_1} \log\left(|z_0|_v\right).\sigma_1(z_0) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}$$

qui entraîne par conséquent

$$\int_{S_{n+1}\times\cdots\times S_{n+1}} \log\left|\frac{f_{n-1}}{f_n}\right|_v .\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\wedge\cdots\wedge\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(n+1)}\right) = 0$$

ou encore

$$\int_{S_{n+1}\times\cdots\times S_{n+1}} \log|f_n|_v .\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\wedge\cdots\wedge\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(n+1)}\right) = \int_{S_{n+1}\times\cdots\times S_{n+1}} \log|f_{n-1}|_v .\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\wedge\cdots\wedge\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(n+1)}\right) \ .$$

D'autre part $f_{n-1}$ est indépendant des variables $\underline{\mathrm{u}}^{(n+1)}$ , ce qui entraîne

$$\int_{S_{n+1}\times\cdots\times S_{n+1}} \log|f_n|_v .\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\wedge\cdots\wedge\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(n+1)}\right) = \int_{S_{n+1}\times\cdots\times S_{n+1}} \log|f_{n-1}|_v .\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\wedge\cdots\wedge\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(n)}\right)$$

et $f_{n-1}$ est indépendant de chacune des variables $u_n^{(j)}$ pour $j = 1,\ldots,n$ , qui en appliquant de nouveau la remarque faite après la **définition 2.1**, nous donne :

$$\int_{S_{n+1}\times\cdots\times S_{n+1}} \log|f_{n-1}|_v .\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\wedge\cdots\wedge\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(n)}\right) = \int_{S_n\times\cdots\times S_n} \log|f_{n-1}|_v .\sigma_n\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\wedge\cdots\wedge\sigma_n\left(\underline{\mathrm{u}}^{(n)}\right) - \frac{1}{2} \ .$$

En itérant cette relation $n$ fois, on obtient :

$$\int_{S_{n+1}\times\cdots\times S_{n+1}} \log|f_n|_v .\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\wedge\cdots\wedge\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(n+1)}\right) = \int_{S_1} \log|f_0|_v .\sigma_1\left(u_0^{(1)}\right) - \frac{n}{2} = -\frac{n}{2} \ ,$$

d'où

$$\int\limits_{S_{n+1}\times\cdots\times S_{n+1}} \log\left|f_n\right|_v.\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}\right)\wedge\cdots\wedge\sigma_{n+1}\left(\underline{\mathrm{u}}^{(n+1)}\right)+(n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}=(n+1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2i}-\frac{n}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{n+1-i}{2i}$$

qui donne le résultat cherché

$$M_v^{(n+1)}\left(f_n\right)=\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{n+1-i}{2i}\right)=\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\right)\quad . \square$$

3) Considérons un hyperplan $H$ de l'espace projectif $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$, d'équation $L(\underline{\mathrm{X}})=0$ où

$$L(\underline{\mathrm{X}})=\sum_{i=0}^{n}a_i.X_i \quad .$$

Une forme éliminante d'indice $(1,\ldots,1)\in\mathrm{N}^n$ de $H$ est :

$$f=\det\begin{pmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} & \cdots & u_0^{(n)} & a_0 \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} & a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \cdots & u_n^{(n)} & a_n \end{pmatrix} .$$

Montrons que pour une place infinie $v$ la mesure de $f$ est :

$$M_v^{(n)}(f)=\left\|\underline{\mathrm{a}}\right\|_v.\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\right)\quad \text{où}\quad \underline{\mathrm{a}}=\left(a_0,\ldots,a_n\right) .$$

On remarque d'abord que $f=\rho\left(f_n\right)$ avec $\rho\left(u_i^{(n+1)}\right)=a_i$ pour $i=0,\ldots,n$ .

D'après le **Corollaire 4** de [ P2 ] , on a

$$\frac{M_v^{(n)}(f)}{M_v^{(n+1)}\left(f_n\right)}=\exp\left(\int\limits_{\mathrm{P}_n}\log\left(\frac{\left|L(\underline{\mathrm{x}})\right|_v}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v}\right).\Omega(\underline{\mathrm{x}})^{\wedge n}\right) ,$$

qui, grâce au ***Lemme 2.11***, donne

$$\frac{M_v^{(n)}(f)}{M_v^{(n+1)}\left(f_n\right)}=\exp\left(\int\limits_{S_{n+1}}\log\left|L(\underline{\mathrm{z}})\right|_v.\sigma_{n+1}(\underline{\mathrm{z}})\right)$$

$$=\left\|\underline{\mathrm{a}}\right\|.\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{i}\right)$$

qui est le résultat souhaité. □

4) Considérons une sous-variété linéaire $V$ de dimension $r-1$ de l'espace projectif $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$, définie par le système d'équations $L^{(j)}(\underline{\mathrm{X}})=0$ pour $j=r+1,\ldots,n+1$ où

$$L^{(j)}(\underline{\mathrm{X}})=\sum_{i=0}^{n} a_i^{(j)}.X_i \quad .$$

Une forme éliminante d'indice $(1,\ldots,1)\in \mathrm{N}^r$ de $V$ est :

$$f=\det\begin{pmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} & \cdots & u_0^{(r)} & a_0^{(r+1)}\cdots a_0^{(n+1)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} & a_1^{(r+1)}\cdots a_1^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \cdots & u_n^{(r)} & a_n^{(r+1)}\cdots a_n^{(n+1)} \end{pmatrix} .$$

Montrons par récurrence, que pour une place infinie $v$ la mesure de $f$ est :

$$M_v^{(r)}(f)=V\left(\underline{\mathrm{a}}^{(r+1)},\ldots,\underline{\mathrm{a}}^{(n+1)}\right).\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\right) \quad \text{où } \underline{\mathrm{a}}^{(j)}=\left(a_0^{(j)},\ldots,a_n^{(j)}\right)$$

et

$$V\left(\underline{\mathrm{a}}^{(r+1)},\ldots,\underline{\mathrm{a}}^{(n+1)}\right)=\left(\det\left\|\left\langle \underline{\mathrm{a}}^{(k)}\middle|\underline{\mathrm{a}}^{(l)}\right\rangle\right\|\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{où} \quad \left\langle \underline{\mathrm{a}}^{(k)}\middle|\underline{\mathrm{a}}^{(l)}\right\rangle=\sum_{j=0}^{n} a_j^{(k)}.a_j^{(l)} \quad .$$

Le résultat est vrai pour $r=n$ .

On remarque d'abord que $f=\rho(f')$ avec $\rho\left(u_i^{(r+1)}\right)=a_i^{(r+1)}$ pour $i=0,\ldots,n$ , où $f'$ est une forme éliminante d'indice $(1,\ldots,1)\in \mathrm{N}^{r+1}$ de la variété linéaire $V'$ de dimension $r$ définie par le système d'équations $L^{(j)}(\underline{\mathrm{X}})=0$ pour $j=r+2,\ldots,n+1$ .

Soit l'hyperplan $\mathfrak{L}_1$ d'équation $\sum_{i=0}^{n} a_i^{(r+1)}.X_i=0$ . Alors on a $V=V'\cap\mathfrak{L}_1$ .

Il existe $\underline{\mathrm{b}}_1=\left(b_{0,1},b_{1,1},\ldots,b_{n,1}\right)\in V'$ et $\underline{\mathrm{b}}_2=\left(b_{0,2},b_{1,2},\ldots,b_{n,2}\right)\in V'^{\perp}$ uniques tels que $\underline{\mathrm{a}}=\underline{\mathrm{b}}_1+\underline{\mathrm{b}}_2$ .

On a alors

$$f=\det\begin{pmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} & \cdots & u_0^{(r)} & b_{0,1} & a_0^{(r+2)}\cdots a_0^{(n+1)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} & b_{1,1} & a_1^{(r+2)}\cdots a_1^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \cdots & u_n^{(r)} & b_{n,1} & a_1^{(r+2)}\cdots a_n^{(n+1)} \end{pmatrix} .$$

On peut encore écrire $f=\rho(f')$ où

$$f' = \det\begin{pmatrix} u_0^{(1)} & u_0^{(2)} & \cdots & u_0^{(r)} & u_0^{(r+1)} & a_0^{(r+2)} \cdots a_0^{(n+1)} \\ u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \cdots & u_1^{(n)} & u_0^{(r+1)} & a_1^{(r+2)} \cdots a_1^{(n+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \cdots & u_n^{(r)} & u_0^{(r+1)} & a_1^{(r+2)} \cdots a_n^{(n+1)} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho\left(u_i^{(r+1)}\right) = b_{i,1} \quad \text{pour} \quad i = 0,\dots,n .$$

D'après le **Corollaire 4** de [ P2 ] , on a

$$\frac{M_v^{(r)}(f)}{M_v^{(r+1)}(f')} = \exp\left( \int_{V'} \log\left( \frac{\left| \sum_{i=0}^{n} b_{1,i}.x_i \right|_v}{\|\underline{x}\|_v} \right) .\Omega(\underline{x})^{\wedge r} \right) .$$

Considérons alors la transformation unitaire $\mathcal{U}$ , telle que $\mathcal{U}(V') = \mathrm{P}_r(\mathrm{C})$ .
Le membre de droite étant invariant par transformation unitaire, on obtient

$$\frac{M_v^{(r)}(f)}{M_v^{(r+1)}(f')} = \exp\left( \int_{\mathrm{P}_r} \log\left( \frac{\left| \sum_{i=0}^{r} b'_{1,i}.x_i \right|_v}{\|\underline{x}\|_v} \right) .\Omega(\underline{x})^{\wedge r} \right) \quad \text{avec} \quad \|\underline{b}'_1\|_v = \|\underline{b}_1\|_v$$

qui, grâce au ***Lemme 2.11***, donne

$$\frac{M_v^{(r)}(f)}{M_v^{(r+1)}(f')} = \exp\left( \int_{S_{r+1}} \log\left| \sum_{i=0}^{r} b'_{1,i}.z_i \right|_v .\sigma_{n+1}(\hat{\underline{z}}) \right) \quad \text{on} \quad \hat{\underline{z}} = (z_0,\dots,z_r)$$

$$= \|\underline{b}_1\| .\exp\left( -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{r} \frac{1}{i} \right)$$

ce qui entraîne, d'après l'hypothèse de récurrence

$$M_v^{(r)}(f) = \|\underline{b}_1\| .V\left(\underline{a}^{(r+2)},\dots,\underline{a}^{(n+1)}\right).\exp\left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} \right)$$

D'après un résultat énoncé par *Y.V. Nesterenko* dans [ N1 ] , on a

$$V\left(\underline{a}^{(r+1)},\underline{a}^{(r+2)},\dots,\underline{a}^{(n+1)}\right) = \|\underline{b}_1\| .V\left(\underline{a}^{(r+2)},\dots,\underline{a}^{(n+1)}\right) ,$$

qui entraîne alors

$$M_v^{(r)}(f) = V\left(\underline{a}^{(r+2)},\underline{a}^{(r+2)},\dots,\underline{a}^{(n+1)}\right).\exp\left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} \right) .$$

### *b - Hauteur d'une variété projective*

**Définition 2.12 -**

· La *hauteur invariante d'indice* $\underline{\mathrm{d}} = (d_1, \ldots, d_r)$ *de la sous-variété projective* $V$ *de* $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ de dimension *r-1*, que l'on note $\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)$, est le nombre réel :

$$\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(V) = \mathrm{h}(f) = \frac{1}{[K:\mathrm{Q}]} . \sum_v n_v . \log M_v^{(r)}(f_v) .$$

· La *hauteur d'indice* $\underline{\mathrm{d}} = (d_1, \ldots, d_r)$ *de la sous-variété projective* $V$ *de* $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$, que l'on note $\overline{\mathrm{h}}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)$, est le nombre réel :

$$\overline{\mathrm{h}}_{\underline{\mathrm{d}}}(V) = \overline{\mathrm{h}}(f) = \frac{1}{[K:\mathrm{Q}]} . \sum_v n_v . Max\left(0, \log M_v^{(r)}(f_v)\right).$$

D'après la formule du produit, on remarque que le nombre $\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)$ ne dépend pas de la forme éliminante $f$ choisie et d'après la ***Proposition 2 .9*** que c'est un nombre positif ou nul.

Lorsque $\underline{\mathrm{d}} = (1, \ldots, 1)$, $\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)$ sera noté simplement $\mathrm{h}(V)$, dans ce cas et lorsque $V$ est une sous-variété de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ de dimension $0$, c'est-à-dire un point de représentant $\underline{\mathrm{x}} \in K^{n+1}$, on obtient :

$$\mathrm{h}(V) = \frac{1}{[K:\mathrm{Q}]} . \sum_v n_v . \log\left(\|\underline{\mathrm{x}}\|_v\right)$$

et $\qquad \mathrm{h}_{d_1}(V) = d_1 . \mathrm{h}(V)$ . □

On va maintenant généraliser cette remarque à une sous-variété projective $V$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ de dimension $r-1$, dans le lemme suivant :

***Lemme 2.13 -***

· *Etant donnés une sous-variété projective* $V$ *de* $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ *de dimension* $r-1$ *et un élément* $\underline{\mathrm{d}} = (d_1, \ldots, d_r) \in \mathrm{N}^r$ *, on a:*

$$\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(V) = d_1 . \ldots . d_r . \mathrm{h}(V) \quad .$$

*Démonstration*

Considérons $f$ et $f'$ deux formes éliminantes de l'idéal de définition $\mathfrak{P}$ de la sous-variété $V$, d'indices respectifs $\underline{\mathrm{d}} = (d_1, \ldots, d_r)$ et $\underline{\mathrm{d}}' = (d_1, \ldots, d_{r-1}, 1)$. On note $\hat{\underline{\mathrm{d}}} = (d_1, \ldots, d_{r-1})$ .

Soit une place $v$ de $K$ et un homomorphisme quelconque défini par

$$\hat{\rho}_r : \mathrm{C}_v\left[\underline{\hat{\mathrm{d}}}\right] \longrightarrow \mathrm{C}_v$$

tel que, pour $j = 1,\ldots,r-1$ ,

$$\begin{cases} \sum_{|\underline{\alpha}|=d_j} \left|\rho_r\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right)\right|_v^2 = 1 & \text{si la place } v \text{ est infinie} \\ \left|\rho_r\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right)\right|_v = 1 & \text{si la place } v \text{ est finie} \end{cases}$$

et $\quad \hat{\rho}_r(f) \neq 0 \quad$ et $\quad \hat{\rho}_r(f') \neq 0$ .

Dans ces conditions,

▪ l'ensemble $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}\left(\hat{\rho}_r\left(\mathfrak{P}[d_1,\ldots,d_{r-1}]\right)\right)$ est fini et inclus dans $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$,

▪ d'après les *Propositions* **(2.4)** et **(2.8)** de [ P1 ], il existe des entiers naturels $\left(l_{\underline{\mathrm{y}}}\right)_{\underline{\mathrm{y}}\in\mathcal{Y}}$ et des éléments $\lambda_0$ et $\lambda_1$ de $\mathrm{C}_v$ tels que $\dfrac{\lambda_0}{(\lambda_1)^{d_r}} = \lambda \in K^*$ soit indépendant de $\rho_r$ vérifiant

$$\hat{\rho}_r\left(f\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)},\underline{\mathrm{u}}^{(2)},\ldots,\underline{\mathrm{u}}^{(r-1)},\underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right)\right) = \lambda_0 \prod_{\underline{\mathrm{y}}\in\mathcal{Y}} \left(U_r\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}}$$

et

$$\hat{\rho}_r\left(f'\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)},\underline{\mathrm{u}}^{(2)},\ldots,\underline{\mathrm{u}}^{(r-1)},\underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right)\right) = \lambda_1 \prod_{\underline{\mathrm{y}}\in\mathcal{Y}} \left(L_r\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \quad \text{avec} \quad \sum_{\underline{\mathrm{y}}\in\mathcal{Y}} l_{\underline{\mathrm{y}}} = d^{\circ}_{\mathcal{U}_r} f \, .$$

Alors pour tout $\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}$ , $\quad M_v^{(1)}\left(U_{v,r}\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right) = \left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v^{d_r} \quad$ et $\quad M_v^{(1)}\left(L_{v,r}\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right) = \left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v$ .

Donc $\quad M_v^{(1)}\left(\rho_r\left(f_v\right)\right) = \left|\lambda_0\right|_v \prod_{y\in\mathcal{Y}} M_v^{(1)}\left(U_{v,r}\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right)^{l_y} = \left|\lambda_0\right|_v \prod_{y\in\mathcal{Y}} \left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v^{d_r.l_y}$

et $\quad M_v^{(1)}\left(\rho_r\left(f_v'\right)\right) = \left|\lambda_1\right|_v \prod_{y\in\mathcal{Y}} M_v^{(1)}\left(L_{v,r}\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right)^{l_y} = \left|\lambda_1\right|_v \prod_{y\in\mathcal{Y}} \left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v^{l_y}$ .

Par conséquent

$$M_v^{(1)}\left(\rho_r\left(f_v\right)\right) = \left|\lambda\right|_v \left(M_v^{(1)}\left(f_v'\right)\right)^{d_r} \quad \text{avec} \quad \lambda \in K^*.$$

- Si $v$ est une place infinie, par intégration, on obtient

$$M_v^{(r)}\left(f_v\right) = \left|\lambda\right|_v \left(M_v^{(r)}\left(f_v'\right)\right)^{d_r} \; .$$

- Si $v$ est une place finie , en utilisant les égalités ultramétriques, on a la même relation .

Ce qui par sommation sur toutes les places $v$ de $K$ et l'utilisation de la formule du produit, donne

$$\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(f) = d_r.\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}'}(f') \ .$$

Par itération, on montre alors que si $f''$ est une forme éliminante de l'idéal de définition $\mathfrak{P}$ de la sous-variété $V$, d'indice $(1,\ldots,1) \in \mathrm{N}^r$

$$\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(f) = d_1.\ldots.d_r.\mathrm{h}(f'')$$

qui est le résultat souhaité. □

## III - Distance d'un point à une sous-variété projective

Considérons un sous-schéma $X$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ définie sur un corps de nombres $K$ dont l'idéal de définition dans $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ est un idéal homogène $\mathfrak{I}$ de dimension $r-1$ et de degré $d$.

On rappelle que $\mathfrak{I} = \{P \in K[X_0, X_1, \dots, X_n] / P(\underline{x}) = 0$ pour tout $\underline{x} \in X \}$

et que $\mathcal{Z}(\mathfrak{I}) = \{\underline{x} \in \mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v) / P(\underline{x}) = 0$ pour tout $P \in \mathfrak{I}\}$

Soit $f$ une forme éliminante d'indice $\underline{d} = (d_1, \dots, d_r) \in \mathrm{N}^r$, de l'idéal $\mathfrak{I}$.

Soit un point de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ de représentants $\underline{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$.

On considère l'homomorphisme $\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}$ de $\mathrm{C}_v$ -algèbre défini dans le premier paragraphe.

**Définition 3.1** - La *distance d'indice* $\underline{d}$ *de* $\underline{x}$ *au sous-schéma* $X$ *de* $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ en la place $v$, que l'on notera $Dist_{v,d}(\underline{x}, X)$, est le nombre défini de la façon suivante :

Pour toute place $v$ :

$$Dist_{v,\underline{d}}(\underline{x}, X) = \left\|\mathfrak{I}(\underline{x})\right\|_{v,\underline{d}} = \frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}(f_v).\prod_{j=1}^{r}\left\|\underline{x}\right\|_v^{d_j.d^\circ_{\underline{u}_j}f}} .$$

Pour une place finie, la définition est celle introduite dans [ P1 ] , par conséquent les résultats qui y figurent ne seront que rappelés .

Une démonstration analogue à celle faite dans [ P1 ] , montre que pour toute place $v$ :

- Si $Dist_{v,\underline{d}}(\underline{x}, X) = 0$ alors $\underline{x} \in X$.
- Si l'idéal $\mathfrak{I}$ est pur $\left\|\mathfrak{I}(\underline{x})\right\|_{v,\underline{d}} = 0$ est équivalent à $\underline{x} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{I})$.

Dans le cas d'une place infinie, $Dist_{v,\underline{d}}(\underline{x}, X)$ est invariant par transformation unitaire de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$.

Si l'on remplace le sous-ensemble algébrique X par le point $\underline{y} = (y_0, y_1 \dots, y_n)$, une forme éliminante d'indice $d$ de $\underline{y}$ est :

$$U_1(\underline{x}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=d} u_{\underline{\alpha}}^{(1)}(\underline{x})^{\underline{\alpha}} .$$

On obtient alors la distance de deux points.

## 1 - Distance de deux points

La **définition 3.1** nous permet de dire que la *distance d'indice* $d$ *de deux points* $\underline{x}$ *et* $\underline{y}$ *de* $P_n(C_v)$ en la place $v$, que l'on notera $Dist_{v,d}(\underline{x},\underline{y})$, est le nombre

$$Dist_{v,d}(\underline{x},\underline{y}) = \frac{M_v^{(1)}\left(\delta_{v,\underline{x},d}\left(U_{v,1}(\underline{y})\right)\right)}{M_v^{(1)}\left(U_{v,1}(\underline{y})\right).\|\underline{x}\|_v^d} = \frac{M_v^{(1)}\left(\delta_{v,\underline{x},d}\left(U_{v,1}(\underline{y})\right)\right)}{\|\underline{y}\|_v^d.\|\underline{x}\|_v^d} .$$

On remarque que cette définition ne dépend pas du représentant de $\underline{x}$ et $\underline{y}$ choisi et que, d'après la ***Proposition 2.3***, elle s'exprime de la façon suivante :

· pour une place infinie $v$, $$Dist_{v,d}(\underline{x},\underline{y}) = \frac{\sqrt{\sum_{\substack{|\alpha|=|\alpha'|=d \\ \alpha\prec\alpha'}} \binom{d}{\alpha}\binom{d}{\alpha'} \left|\underline{x}^{\alpha}.\underline{y}^{\alpha'} - \underline{x}^{\alpha'}.\underline{y}^{\alpha}\right|_v^2}}{\|\underline{y}\|_v^d.\|\underline{x}\|_v^d} ,$$

· pour une place finie $v$, $$Dist_{v,d}(\underline{x},\underline{y}) = \frac{\underset{\substack{|\alpha|=|\alpha'|=d \\ \alpha\prec\alpha'}}{Max}\left(\left|\underline{x}^{\alpha}.\underline{y}^{\alpha'} - \underline{x}^{\alpha'}.\underline{y}^{\alpha}\right|_v\right)}{\|\underline{y}\|_v^d.\|\underline{x}\|_v^d} .$$

On remarque aussi que

- Pour tout $(\underline{x},\underline{y}) \in C_v \times C_v$, on a $Dist_{v,d}(\underline{x},\underline{y}) \geq 0$.
- Pour tout $(\underline{x},\underline{y}) \in C_v \times C_v$, on a $Dist_{v,d}(\underline{y},\underline{x}) = Dist_{v,d}(\underline{x},\underline{y})$ .

On déduit enfin que

- Pour tout $\underline{x} \in C_v$ , $Dist_{v,d}(\underline{x},\underline{x}) = 0$.

Etudions plus précisément le cas $d = 1$.

On montrera que dans ce cas $Dist_{v,1}$ , que nous noterons $Dist_v$ , est une distance sur $P_n(C_v)$ .

· Pour une place finie $v$, on a

$$Dist_v(\underline{x},\underline{y}) = \frac{\underset{i<j}{Max}\left(\left|x_i.y_j - x_j.y_i\right|_v\right)}{\|\underline{y}\|_v.\|\underline{x}\|_v}$$

On montre sans aucun problème que $Dist_v$ est une distance ultramétrique.

· Pour une place infinie $v$ , on a

$$Dist_v\left(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}\right)=\frac{\sqrt{\sum_{0\le i<j\le n}\left|x_iy_j-x_jy_i\right|_v^2}}{\left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v\cdot\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v} \quad .$$

Montrons l'inégalité triangulaire .

On aura besoin des résultats suivants :

***Lemme 3.2*** - *Etant donnés trois éléments* $\underline{\mathrm{x}}$, $\underline{\mathrm{y}}$ *et* $\underline{\mathrm{z}}$ *de* $\mathrm{C}_v^{n+1}$ *, on a les relations suivantes :*

*(i)* $$\frac{\sum_{0\le i<j\le n}\left|x_iy_j-x_jy_i\right|_v^2}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^2\left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v^2}+\frac{\left|\sum_{i=0}^{n}x_i\overline{y}_i\right|_v^2}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^2\left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v^2}=1,$$

*(ii)* $$\frac{\sqrt{\sum_{0\le i<j\le n}\left|x_iy_j-x_jy_i\right|_v^2}}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v\left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v}\le\frac{\sqrt{\sum_{0\le i<j\le n}\left|x_iz_j-x_jz_i\right|_v^2}}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v\left\|\underline{\mathrm{z}}\right\|_v}+\frac{\sqrt{\sum_{0\le i<j\le n}\left|z_iy_j-z_jy_i\right|_v^2}}{\left\|\underline{\mathrm{z}}\right\|_v\left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v} \quad .$$

*La relation (ii) est l'inégalité triangulaire.*

*(iii) si* $Dist_v\left(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}\right)=1$ *on a alors*

$$1=\left(Dist_v\left(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}\right)\right)^2\le\left(Dist_v\left(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{z}}\right)\right)^2+\left(Dist_v\left(\underline{\mathrm{z}},\underline{\mathrm{y}}\right)\right)^2 \quad .$$

*Démonstration*

- La relation *(i)* se démontre par récurrence.

  · pour $n=1$ ,

$$\left|x_0y_1-x_1y_0\right|_v^2+\left|x_0\overline{y}_0+x_1\overline{y}_1\right|_v^2=\left|x_0\overline{x}_0+x_1\overline{x}_1\right|_v\left|y_0\overline{y}_0+y_1\overline{y}_1\right|_v \quad ,$$

  · pour $n\ge1$ , supposons la relation *(i)* vraie, alors

$$\sum_{0\le i<j\le n+1}\left|x_iy_j-x_jy_i\right|_v^2+\left|\sum_{i=0}^{n+1}x_i\overline{y}_i\right|_v^2=\sum_{0\le i<j\le n}\left|x_iy_j-x_jy_i\right|_v^2+\left|\sum_{i=0}^{n}x_i\overline{y}_i\right|_v^2+\sum_{i=0}^{n}\left|x_iy_{n+1}-x_{n+1}y_i\right|_v^2$$
$$+\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\overline{y}_i\right)\overline{x}_{n+1}y_{n+1}+\left(\sum_{i=0}^{n}\overline{x}_iy_i\right)x_{n+1}\overline{y}_{n+1}+\left|x_{n+1}y_{n+1}\right|_v^2$$

$$\sum_{0\le i<j\le n+1}\left|x_iy_j-x_jy_i\right|_v^2+\left|\sum_{i=0}^{n+1}x_i\overline{y}_i\right|_v^2=\left(\sum_{i=0}^{n}\left|x_i\right|_v^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\left|y_i\right|_v^2\right)+\left(\sum_{i=0}^{n}\left|x_i\right|_v^2\right)\left|y_{n+1}\right|_v^2+\left(\sum_{i=0}^{n}\left|y_i\right|_v^2\right)\left|x_{n+1}\right|_v^2$$
$$+\left|x_{n+1}y_{n+1}\right|_v^2$$

c'est-à-dire

$$\sum_{0\le i<j\le n+1}\left|x_iy_j-x_jy_i\right|_v^2+\left|\sum_{i=0}^{n+1}x_i\overline{y}_i\right|_v^2=\left(\sum_{i=0}^{n+1}\left|x_i\right|_v^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n+1}\left|y_i\right|_v^2\right)$$

Ce qui démontre donc la relation *(i)*.

- Pour la relation *(ii)*, on va montrer pour $n=1$ une relation plus précise qui est :

$$\frac{\left|x_0y_1-x_1y_0\right|_v}{\left\|\underline{x}\right\|_v\left\|\underline{y}\right\|_v}\le\frac{\left|x_0z_1-x_1z_0\right|_v}{\left\|\underline{x}\right\|_v\left\|\underline{z}\right\|_v}\times\frac{\left|z_0\overline{y}_0+z_1\overline{y}_1\right|_v}{\left\|\underline{z}\right\|_v\left\|\underline{y}\right\|_v}+\frac{\left|z_0y_1-z_1y_0\right|_v}{\left\|\underline{z}\right\|_v\left\|\underline{y}\right\|_v}\times\frac{\left|x_0\overline{z}_0+x_1\overline{z}_1\right|_v}{\left\|\underline{x}\right\|_v\left\|\underline{z}\right\|_v}$$

or d'après la relation *(i)* on a

$$\frac{\left|z_0\overline{y}_0+z_1\overline{y}_1\right|_v}{\left\|\underline{z}\right\|_v\left\|\underline{y}\right\|_v}\le 1\qquad\text{et}\qquad\frac{\left|x_0\overline{z}_0+x_1\overline{z}_1\right|_v}{\left\|\underline{x}\right\|_v\left\|\underline{z}\right\|_v}\le 1,$$

qui permet de déduire la relation *(ii)*.

On remarque d'abord que l'homogénéité de la formule permet, sans restriction, de prendre $\underline{x}$ ,y *et* $\underline{z}$ tels que $\left\|\underline{x}\right\|_v=\left\|\underline{y}\right\|_v=\left\|\underline{z}\right\|_v=1$ .

La relation à montrer devient alors

$$\left|x_0y_1-x_1y_0\right|_v\le\left|x_0z_1-x_1z_0\right|_v\times\left|y_0\overline{z}_0+y_1\overline{z}_1\right|_v+\left|z_0y_1-z_1y_0\right|_v\times\left|x_0\overline{z}_0+x_1\overline{z}_1\right|_v.$$

Relation qui est évidente en remarquant que l'on a l'égalité:

$$\left(x_0y_1-x_1y_0\right)\left(z_0\overline{z}_0+z_1\overline{z}_1\right)=\left(x_0z_1-x_1z_0\right)\times\left(y_0\overline{z}_0+y_1\overline{z}_1\right)+\left(z_0y_1-z_1y_0\right)\times\left(x_0\overline{z}_0+x_1\overline{z}_1\right).$$

et

$$z_0\overline{z}_0+z_1\overline{z}_1=1.$$

- Démontrons la relation *(ii)* pour tout $n \geq 1$.

On remarque d'abord que pour tout couple de complexes $(\lambda, \mu)$ et pour tout couple $(\underline{x}, \underline{y})$ de $C_v^{n+1} \times C_v^{n+1}$ on a :

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \left| x_i \left( \lambda x_j + \mu y_j \right) - x_j \left( \lambda x_i + \mu y_i \right) \right|_v^2 = |\mu|_v^2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \left| x_i y_j - x_j y_i \right|_v^2$$

et
$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \left| y_i \left( \lambda x_j + \mu y_j \right) - y_j \left( \lambda x_i + \mu y_i \right) \right|_v^2 = |\lambda|_v^2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} \left| x_i y_j - x_j y_i \right|_v^2 .$$

Par conséquent

$$Dist_v \left( \underline{x}, \lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y} \right) = \frac{|\mu|_v . \|\underline{y}\|_v}{\|\lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y}\|_v} Dist_v \left( \underline{x}, \underline{y} \right)$$

et
$$Dist_v \left( \lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y}, \underline{y} \right) = \frac{|\lambda|_v \|\underline{x}\|_v}{\|\lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y}\|_v} Dist_v \left( \underline{x}, \underline{y} \right),$$

d'où l'on déduit

$$Dist_v \left( \underline{x}, \lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y} \right) + Dist_v \left( \lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y}, \underline{y} \right) = \frac{|\lambda|_v . \|\underline{x}\|_v + |\mu|_v . \|\underline{y}\|_v}{\|\lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y}\|_v} Dist_v \left( \underline{x}, \underline{y} \right) \geq Dist_v \left( \underline{x}, \underline{y} \right).$$

Considérons l'espace préhilbertien complexe $C^{n+1}$ muni du produit scalaire hermitien

$$\left\langle \underline{x} \middle| \underline{y} \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i \overline{y}_i .$$

Soit $E$ le sous espace engendré par $\{\underline{x}, \underline{y}\}$ et $\underline{z}$ un élément de $C^{n+1}$ , il existe alors deux nombres complexes $\lambda$ et $\mu$ ( uniques si $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont linéairement indépendants) et un élément $\underline{z}'$ de $E^{\perp}$ tel que :

$$\underline{z} = \underline{z}' + \lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y} .$$

On a alors

$$\left\langle \underline{z} \middle| \underline{x} \right\rangle = \left\langle \lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y} \middle| \underline{x} \right\rangle \qquad \text{et} \qquad \left\langle \underline{z} \middle| \underline{y} \right\rangle = \left\langle \lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y} \middle| \underline{y} \right\rangle$$

Or d'après la relation *(i)*

$$\left( Dist_v \left( \underline{z}, \underline{x} \right) \right)^2 = 1 - \frac{\left| \left\langle \underline{z} \middle| \underline{x} \right\rangle \right|^2}{\|\underline{z}\|_v^2 \|\underline{x}\|_v^2} \quad \text{ou encore} \quad \left| \left\langle \underline{z} \middle| \underline{x} \right\rangle \right|^2 = \left( 1 - \left( Dist_v \left( \underline{z}, \underline{x} \right) \right)^2 \right) \|\underline{z}\|_v^2 \|\underline{x}\|_v^2$$

$$\left( Dist_v \left( \underline{x}, \lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y} \right) \right)^2 = 1 - \frac{\left| \left\langle \lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y} \middle| \underline{x} \right\rangle \right|^2}{\|\lambda.\underline{x} + \mu.\underline{y}\|_v^2 \|\underline{x}\|_v^2}$$

$$\left(Dist_v\left(\underline{x},\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\right)\right)^2 = 1-\frac{\left|\langle \underline{z}|\underline{x}\rangle\right|^2}{\left\|\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\right\|_v^2 \left\|\underline{x}\right\|_v^2}$$

$$= 1-\left(1-\left(Dist_v\left(\underline{x},\underline{z}\right)\right)^2\right)\frac{\left\|\underline{z}\right\|_v^2}{\left\|\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\right\|_v^2} \quad .$$

Et comme $\quad \dfrac{\left\|\underline{z}\right\|_v^2}{\left\|\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\right\|_v^2} \geq 1$

cela entraîne

$$Dist_v\left(\underline{x},\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\right) \leq Dist_v\left(\underline{x},\underline{z}\right)$$

et de la même façon

$$Dist_v\left(\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y},\underline{y}\right) \leq Dist_v\left(\underline{z},\underline{y}\right).$$

Et d'après la remarque préliminaire, on peut conclure

$$Dist_v\left(\underline{x},\underline{y}\right) \leq Dist_v\left(\underline{x},\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\right)+Dist_v\left(\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y},\underline{y}\right) \leq Dist_v\left(\underline{x},\underline{z}\right)+Dist_v\left(\underline{z},\underline{y}\right).$$

ce qui termine la démonstration de la propriété *(ii)* du ***lemme 3.2***.

- Démontrons la relation *(iii)* .

  En reprenant les notations et les éléments utilisés dans la relation *(ii)*, on obtient :

$$Dist_v\left(\underline{x},\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\right) = \frac{|\mu|_v . \left\|\underline{y}\right\|_v}{\left\|\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\right\|_v} Dist_v\left(\underline{x},\underline{y}\right)$$

et

$$Dist_v\left(\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y},\underline{y}\right) = \frac{|\lambda|_v \left\|\underline{x}\right\|_v}{\left\|\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\right\|_v} Dist_v\left(\underline{x},\underline{y}\right).$$

puis

$$Dist_v\left(\underline{x},\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\right) \leq Dist_v\left(\underline{x},\underline{z}\right)$$

et

$$Dist_v\left(\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y},\underline{y}\right) \leq Dist_v\left(\underline{z},\underline{y}\right).$$

Cela entraîne alors

$$\frac{|\lambda|_v^2.\|\underline{x}\|_v^2+|\mu|_v^2.\|\underline{y}\|_v^2}{\|\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\|_v^2}\left(Dist_v\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^2 \le \left(Dist_v\left(\underline{x},\underline{z}\right)\right)^2+\left(Dist_v\left(\underline{z},\underline{y}\right)\right)^2 .$$

Mais si $Dist_v\left(\underline{x},\underline{y}\right)=1$, les vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont orthogonaux et $\frac{|\lambda|_v^2.\|\underline{x}\|_v^2+|\mu|_v^2.\|\underline{y}\|_v^2}{\|\lambda.\underline{x}+\mu.\underline{y}\|_v^2}=1$

,
ce qui entraîne bien la relation *(iii)*, c'est-à-dire

$$1=\left(Dist_v\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^2 \le \left(Dist_v\left(\underline{x},\underline{z}\right)\right)^2+\left(Dist_v\left(\underline{z},\underline{y}\right)\right)^2 . \ \square$$

***Remarques :***

- Pour une place finie , d'après [ P1 ] ,

$$Dist_{v,d}\left(\underline{y},\underline{x}\right)=Dist_v\left(\underline{y},\underline{x}\right) .$$

- Pour une place infinie ,

$$Dist_{v,d}\left(\underline{y},\underline{x}\right)=Dist_v\left(\omega_d\left(\underline{y}\right),\omega_d\left(\underline{x}\right)\right)$$

où $\omega_d$ est le plongement de $\mathrm{P}_n\left(\mathrm{C}_v\right)$ dans $\mathrm{P}_N\left(\mathrm{C}_v\right)$ avec $N=\binom{n+d}{d}-1$ , défini au premier paragraphe, on peut donc affirmer que $Dist_{v,d}$ est aussi une distance sur $\mathrm{P}_n\left(\mathrm{C}_v\right)$ . Cette distance étant archimédienne si la place *v* est infinie et ultramétrique si la place *v* est finie.

- Pour une place infinie ,

· la propriété *(1)* du ***lemme 3.2*** , nous amène à définir naturellement

$$\sin_v\left(\underline{x},\underline{y}\right)=\frac{\sqrt{\sum_{0\le i<j\le n}\left|x_iy_j-x_jy_i\right|_v^2}}{\|\underline{x}\|_v\,\|\underline{y}\|_v} \qquad \text{et} \qquad \cos_v\left(\underline{x},\underline{y}\right)=\frac{\left|\sum_{i=0}^{n}x_i\overline{y}_i\right|_v}{\|\underline{x}\|_v\,\|\underline{y}\|_v} .$$

qui sont en fait les sinus et cosinus de l'angle $\left(\widehat{\underline{x},\underline{y}}\right)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ dans le plan engendré par $\underline{x}$ et $\underline{y}$.

· La propriété *(2)* de ce même ***lemme 3.2*** nous donne alors la relation

$$\sin_v\left(\underline{x},\underline{z}\right) \le \sin_v\left(\underline{x},\underline{y}\right) + \sin_v\left(\underline{y},\underline{z}\right)$$

avec l'inégalité plus précise obtenue dans le cas $n=1$,

$$\sin_v\left(\underline{x},\underline{z}\right) \le \sin_v\left(\underline{x},\underline{y}\right).\cos_v\left(\underline{y},\underline{z}\right) + \sin_v\left(\underline{y},\underline{z}\right).\cos_v\left(\underline{x},\underline{y}\right).$$

· On définit aussi

$$\sin_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right) = \frac{M_v\left(\delta_{v,\underline{x},d}\left(U_v\left(\underline{y}\right)\right)\right)}{\left\|\underline{x}\right\|_v^d.\left\|\underline{y}\right\|_v^d} = \frac{\sqrt{\sum_{\substack{|\underline{\alpha}|=|\underline{\alpha}'|=d \\ \underline{\alpha}\prec\underline{\alpha}'}} \binom{d}{\underline{\alpha}}\binom{d}{\underline{\alpha}'}\left|\underline{x}^{\underline{\alpha}}.\underline{y}^{\underline{\alpha}'} - \underline{x}^{\underline{\alpha}'}.\underline{y}^{\underline{\alpha}}\right|_v^2}}{\left\|\underline{x}\right\|_v^d \left\|\underline{y}\right\|_v^d}$$

et

$$\cos_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right) = \frac{\left|\sum_{|\underline{\alpha}|=d}\binom{d}{\underline{\alpha}}\underline{x}^{\underline{\alpha}}.\overline{\underline{y}}^{\underline{\alpha}}\right|_v}{\left\|\underline{x}\right\|_v^d \left\|\underline{y}\right\|_v^d} = \frac{\left|\sum_{i=0}^{n} x_i\overline{y}_i\right|_v^d}{\left\|\underline{x}\right\|_v^d \left\|\underline{y}\right\|_v^d} = \left(\cos_v\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^d \quad .$$

- Pour une place infinie, comme $\left|\sum_{i=0}^{n} x_i\overline{y}_i\right|_v$ est invariant par transformation unitaire, on déduit que $Dist_{v,d}\left(\underline{y},\underline{x}\right)$ est aussi invariant par transformation unitaire. □

***Proposition 3.3*** - *Etant donnés deux points* $\underline{x}$ *et* $\underline{y}$ *de* $\mathbb{C}_v^{n+1}$ *on a la propriété suivante :*

*(i) Pour toute place* $v$ *,* $\qquad Dist_v\left(\underline{y},\underline{x}\right) \le 1$,

*de plus, si* $y_0 = 0$, *on a* $\dfrac{|x_0|_v}{\left\|\underline{x}\right\|_v} \le Dist_v\left(\underline{y},\underline{x}\right)$ .

*(ii) Pour toute place* $v$ *,* $\quad Dist_v\left(\underline{y},\underline{x}\right) \le \dfrac{\left\|\underline{y}-\underline{x}\right\|_v}{Max\left(\left\|\underline{x}\right\|_v,\left\|\underline{y}\right\|_v\right)}$ .

*Démonstration*

- La première partie de la propriété *(i)* est simple, en effet:

  Pour une place finie, le résultat est immédiat.

  Pour une place infinie , il suffit d'appliquer la propriété *(i)* du ***lemme 3.2.***

- Pour la seconde partie de la propriété *(i)*, on considérera deux cas.

- Si $v$ est une place infinie et si $y_0 = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le i<j\le n} \left|x_i y_j - x_j y_i\right|_v^2 &\ge \sum_{j=0}^{n} \left|x_0 y_j - x_j y_0\right|_v^2 \\
&\ge \sum_{j=0}^{n} \left|x_0 y_j\right|_v^2 \\
&\ge \left|x_0\right|_v^2 \left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v^2
\end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat souhaité.

- Si $v$ est une place finie et si $y_0 = 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\max_{0\le i<j\le n} \left|x_i y_j - x_j y_i\right|_v &\ge \max_{0\le j\le n} \left|x_0 y_j - x_j y_0\right|_v \\
&\ge \max_{0\le j\le n} \left|x_0 y_j\right|_v \\
&\ge \left|x_0\right|_v \max_{0\le j\le n} \left|y_j\right|_v
\end{aligned}$$

Ce qui cette fois donne le résultat souhaité pour une place finie et permet d'énoncer la deuxième partie de la relation *(i)*.

- Pour la propriété *(ii)*.

- Si $v$ est une place infinie,

Considérons l'espace préhilbertien complexe $\mathrm{C}^{n+1}$ muni du produit scalaire hermitien

$$\left\langle \underline{\mathrm{x}} \middle| \underline{\mathrm{y}} \right\rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i \overline{y}_i \quad .$$

Soit $E$ le sous espace engendré par $\left\{\underline{\mathrm{y}}\right\}$, l'élément $\underline{\mathrm{x}}$ de $\mathrm{C}^{n+1}$ s'écrit

$$\underline{\mathrm{x}} = \underline{\mathrm{y}_1} + \underline{\mathrm{y}_2} \qquad \text{avec} \quad \underline{\mathrm{y}_1} \in E \quad \text{et} \qquad \underline{\mathrm{y}_2} \in E^{\perp}.$$

On a alors

$$\left\langle \underline{\mathrm{x}} \middle| \underline{\mathrm{y}} \right\rangle = \left\langle \underline{\mathrm{y}_1} \middle| \underline{\mathrm{y}} \right\rangle \qquad \text{et} \qquad \left\|\underline{\mathrm{y}_1}\right\|_v^2 + \left\|\underline{\mathrm{y}_2}\right\|_v^2 = \left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^2 \quad ,$$

ce qui entraîne

$$\cos_v\left(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}\right) = \frac{\left|\left\langle \underline{\mathrm{y}_1} \middle| \underline{\mathrm{y}} \right\rangle\right|_v}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v \cdot \left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v} = \frac{\left\|\underline{\mathrm{y}_1}\right\|_v}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v} \qquad \text{et} \qquad \sin_v\left(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}\right) = \frac{\left\|\underline{\mathrm{y}_2}\right\|_v}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v} \quad .$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\|\underline{x}-\underline{y}\|_v^2 &= \langle \underline{x}-\underline{y} | \underline{x}-\underline{y} \rangle \\
&= \langle \underline{y}_1+\underline{y}_2-\underline{y} | \underline{y}_1+\underline{y}_2-\underline{y} \rangle \\
&= \|\underline{y}_1-\underline{y}\|_v^2 + \|\underline{y}_2\|_v^2 \\
&\geq \|\underline{x}\|_v^2 .\sin_v(\underline{x},\underline{y})
\end{aligned}$$

qui entraîne

$$\sin_v(\underline{x},\underline{y}) \leq \frac{\|\underline{x}-\underline{y}\|_v^2}{\|\underline{x}\|_v^2} \quad .$$

De la même façon on a

$$\sin_v(\underline{x},\underline{y}) \leq \frac{\|\underline{x}-\underline{y}\|_v^2}{\|\underline{y}\|_v^2} \quad .$$

Ce qui permet de déduire immédiatement la relation *(ii)* pour une place infinie.

- Si $v$ est une place finie

$$\begin{aligned}
\max_{0\leq i<j\leq n} |x_i y_j - x_j y_i|_v &\leq \max_{0\leq i<j\leq n} |(x_i-y_i)y_j - (x_j-y_j)y_i|_v \\
&\leq \max_{0\leq i<j\leq n} |(x_i-y_i)y_j|_v \\
&\leq \max_{0\leq j\leq n} |y_j|_v .\max_{0\leq i\leq n} |x_i-y_i|_v \\
&\leq \|\underline{y}\|_v \|\underline{x}-\underline{y}\|_v
\end{aligned}$$

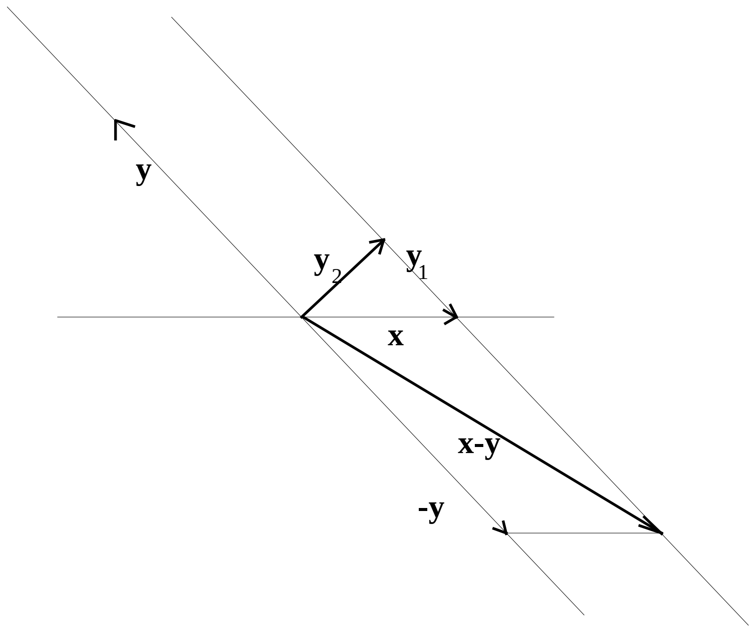
d'où

$$Dist_v(\underline{y},\underline{x}) \leq \frac{\|\underline{x}-\underline{y}\|_v}{\|\underline{y}\|_v} \qquad \text{et de la même façon} \qquad Dist_v(\underline{y},\underline{x}) \leq \frac{\|\underline{x}-\underline{y}\|_v}{\|\underline{x}\|_v} \quad .$$

Ces deux inégalités permettent de déduire la relation *(ii)* pour une place finie, ce qui achève ainsi la démonstration de la ***Proposition 3.3*** . ☐

***Remarque :***

On peut visualiser très facilement la relation *(ii)* de cette proposition sur la figure ci-dessous:




Lorsque l'on fait varier $\underline{y}$ en gardant une direction constante, on constate que

$$\left\|\underline{x}-\underline{y}\right\|_v \geq \left\|\underline{y}_2\right\|_v \quad ,$$

or $$\left\|\underline{x}\right\|_v .\sin\left(\underline{x},\underline{y}\right) = \left\|\underline{y}_2\right\|_v ,$$

ce qui illustre bien le résultat. □

Plaçons nous dans la carte affine de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ définie par $\{X_0 \neq 0\}$ munie de la métrique euclidienne et notons les éléments de cette carte $\underline{\hat{x}} = \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$.

Nous pouvons alors énoncer :

***Proposition 3.4*** *- Etant donnés deux points* $\underline{x}$ *et* $\underline{y}$ *de* $\mathrm{C}_v^{n+1}$ *tels que* $x_0 \neq 0$*, on a la propriété suivante :*

*(i) Si* $y_0 = 0$*, pour toute place* $v$*,*

$$\frac{1}{\sqrt{1+\|\underline{\hat{x}}\|_v^2}} \leq Dist_v(\underline{y}, \underline{x}) \leq 1.$$

*(ii) Si* $y_0 \neq 0$*,*

*pour toute place infinie* $v$*,*

$$\frac{\|\underline{\hat{y}} - \underline{\hat{x}}\|_v}{\sqrt{\left(1+\|\underline{\hat{x}}\|_v^2\right)\left(1+\|\underline{\hat{y}}\|_v^2\right)}} \leq Dist_v(\underline{y}, \underline{x}) \leq \frac{\|\underline{\hat{y}} - \underline{\hat{x}}\|_v}{\sqrt{\max\left(1+\|\underline{\hat{x}}\|_v^2, 1+\|\underline{\hat{y}}\|_v^2\right)}},$$

*pour toute place finie* $v$*,*

$$\frac{\|\underline{\hat{y}} - \underline{\hat{x}}\|}{\max\left(1, \|\underline{\hat{x}}\|_v\right).\max\left(1, \|\underline{\hat{y}}\|_v\right)} \leq Dist_v(\underline{y}, \underline{x}) \leq \frac{\|\underline{\hat{y}} - \underline{\hat{x}}\|_v}{\max\left(1, \|\underline{\hat{x}}\|_v, \|\underline{\hat{y}}\|_v\right)}.$$

Démonstration

- Si $y_0 = 0$, la relation découle immédiatement de la relation *(i)* de la ***Proposition 3.3.***

  En effet, on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+\|\underline{\hat{x}}\|_v^2}} \leq \frac{|x_0|_v}{\|\underline{x}\|_v} \leq Dist_v(\underline{y}, \underline{x}).$$

- Si $y_0 \neq 0$, démontrons d'abord la majoration. Pour cela, appliquons la relation *(ii)* de la ***Proposition 3.3*** aux éléments $\frac{1}{x_0}.\underline{x}$ *et* $\frac{1}{y_0}.\underline{y}$ de $\mathrm{C}_v^{n+1}$. On obtient alors:

- pour une place infinie

$$Dist_v\left(\frac{1}{y_0}.\underline{y}, \frac{1}{x_0}.\underline{x}\right) \leq \frac{\left\|\frac{1}{y_0}.\underline{y} - \frac{1}{x_0}.\underline{x}\right\|_v}{\max\left(\left\|\frac{1}{x_0}.\underline{x}\right\|_v, \left\|\frac{1}{y_0}.\underline{y}\right\|_v\right)}.$$

  Mais comme

$$Dist_v\left(\frac{1}{y_0}.\underline{y}, \frac{1}{x_0}.\underline{x}\right) = Dist_v(\underline{y}, \underline{x}) \qquad \text{et} \qquad \left\|\frac{1}{y_0}.\underline{y} - \frac{1}{x_0}.\underline{x}\right\|_v = \|\underline{\hat{y}} - \underline{\hat{x}}\|_v,$$

  on déduit immédiatement la relation *(ii)* pour une place infinie.

- pour une place finie, la relation est immédiate puisque:

$$Dist_v\left(\frac{1}{y_0}.\underline{y},\frac{1}{x_0}.\underline{x}\right)\le\frac{\left\|\frac{1}{y_0}.\underline{y}-\frac{1}{x_0}.\underline{x}\right\|_v}{\max\left(\left\|\frac{1}{x_0}.\underline{x}\right\|_v,\left\|\frac{1}{y_0}.\underline{y}\right\|_v\right)}$$

et

$$\max\left(\left\|\frac{1}{x_0}.\underline{x}\right\|_v,\left\|\frac{1}{y_0}.\underline{y}\right\|_v\right)\ge\max\left(1,\left\|\underline{\hat{x}}\right\|,\left\|\underline{\hat{y}}\right\|\right).$$

Démontrons maintenant la minoration.
On remarque pour cela que:

- pour une place infinie,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{y_0}.\underline{y}-\frac{1}{x_0}.\underline{x}\right\|_v^2&=\sum_{i=0}^{n}\left|\frac{x_i}{x_0}-\frac{y_i}{y_0}\right|_v^2\\&=\frac{1}{|x_0|^2|y_0|^2}.\sum_{i=0}^{n}|y_0x_i-x_0y_i|_v^2\\&\le\frac{1}{|x_0|^2|y_0|^2}.\sum_{0\le i<j\le n}|y_jx_i-x_jy_i|_v^2\\&\le\frac{1}{|x_0|^2|y_0|^2}\left(Dist_v\left(\underline{y},\underline{x}\right)\right)^2\left\|\underline{x}\right\|_v^2\left\|\underline{y}\right\|_v^2\\&\le\left(1+\left\|\underline{\hat{x}}\right\|_v^2\right)\left(1+\left\|\underline{\hat{y}}\right\|_v^2\right)\left(Dist_v\left(\underline{y},\underline{x}\right)\right)^2\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\frac{\left\|\underline{\hat{y}}-\underline{\hat{x}}\right\|_v^2}{\left(1+\left\|\underline{\hat{x}}\right\|_v^2\right)\left(1+\left\|\underline{\hat{y}}\right\|_v^2\right)}\le\left(Dist_v\left(\underline{y},\underline{x}\right)\right)^2$$

- pour une place finie,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{y_0}.\underline{y}-\frac{1}{x_0}.\underline{x}\right\|_v&=\max_{1\le i\le n}\left(\left|\frac{x_i}{x_0}-\frac{y_i}{y_0}\right|_v\right)\\&=\frac{1}{|x_0|_v|y_0|_v}.\max_{1\le i\le n}\left(|y_0x_i-x_0y_i|_v\right)\end{aligned}$$

$$\left\| \frac{1}{y_0}.\underline{y} - \frac{1}{x_0}.\underline{x} \right\|_v \le \frac{1}{|x_0|_v |y_0|_v} \max_{0\le i<j\le n} \left( \left| y_j x_i - x_j y_i \right|_v \right)$$

$$\le \max_{0\le i\le n} \left( \frac{|x_i|_v}{|x_0|_v} \right) \max_{0\le j\le n} \left( \frac{|y_j|_v}{|y_0|_v} \right) \left( Dist_v \left( \underline{y}, \underline{x} \right) \right)$$

$$\le \max\left(1, \left\|\hat{\underline{x}}\right\|_v\right).\max\left(1, \left\|\hat{\underline{y}}\right\|_v\right).\left(Dist_v\left(\underline{y}, \underline{x}\right)\right).$$

Ce qui achève la démonstration de la Proposition. □

Nous allons maintenant nous intéresser à $Dist_{v,d}$ et la comparer à $Dist_{v,\delta}$.

> ***Proposition 3.5*** - *Etant donnés deux points* $\underline{x}$ *et* $\underline{y}$ *de* $\mathbb{C}_v^{n+1}$ *et deux entiers non nuls* $d$ *et* $\delta$ *avec* $d<\delta$ *, alors on a les propriétés suivantes :*
>
> *(i) Pour toute place* $v$ *,* $Dist_{v,d}\left(\underline{y},\underline{x}\right) \le 1$.
>
> *(ii) Pour toute place finie* $v$ *,*
>
> $$Dist_{v,d}\left(\underline{y},\underline{x}\right) = Dist_{v,\delta}\left(\underline{y},\underline{x}\right) ,$$
>
> *Pour toute place infinie* $v$ *,*
>
> $$Dist_{v,d}\left(\underline{y},\underline{x}\right) \le Dist_{v,\delta}\left(\underline{y},\underline{x}\right) \le \sqrt{\frac{\delta}{d}}.Dist_{v,d}\left(\underline{y},\underline{x}\right) .$$

Démonstration

- Pour une place finie le résultat de la relation *(i)* est immédiat.

  Pour une place infinie, il découle immédiatement de la ***Proposition 3.3***, puisque
  $$Dist_{v,d}\left(\underline{y},\underline{x}\right) = Dist_v\left(\omega_d\left(\underline{y}\right),\omega_d\left(\underline{x}\right)\right) .$$

- Pour une place finie , le résultat de la relation *(ii)* est celui du *Lemme* (**2.9**) de [ P1 ] .

  Dans le cas d'une place infinie, on va utiliser les remarques faites à la suite de la démonstration du ***lemme 3.2 .***

  · Démontrons d'abord la minoration. D'après ces remarques

$$\sin_{v,\delta}\left(\underline{x},\underline{y}\right) = \sqrt{1-\left(\cos_{v,\delta}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^2} \quad \text{et} \quad \cos_{v,\delta}\left(\underline{x},\underline{y}\right) = \left(\cos_v\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^\delta \le 1$$

$$\sin_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right) = \sqrt{1-\left(\cos_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^2} \quad \text{et} \quad \cos_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right) = \left(\cos_v\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^d \le 1$$

donc

$$\cos_{v,\delta}\left(\underline{x},\underline{y}\right) \leq \cos_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin_{v,\delta}\left(\underline{x},\underline{y}\right) \geq \sqrt{1-\left(\cos_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^2} ,$$

ce qui prouve que $\sin_{v,\delta}\left(\underline{x},\underline{y}\right) \geq \sin_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)$ , qui est le résultat souhaité, à savoir

$$Dist_{v,d}\left(\underline{y},\underline{x}\right) \leq Dist_{v,\delta}\left(\underline{y},\underline{x}\right) .$$

▪ Démontrons maintenant la majoration. En utilisant toujours les mêmes remarques, on a

$$\begin{aligned}\sin_{v,\delta}\left(\underline{x},\underline{y}\right) &= \sqrt{1-\left(\cos_{v,\delta}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^2}\\ &= \sqrt{1-\left(\cos_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^{2\frac{\delta}{d}}}\\ &= \sqrt{1-\left(1-\left(\sin_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^2\right)^{\frac{\delta}{d}}} .\end{aligned}$$

Mais comme $0 \leq \sin_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right) \leq 1$,

$$\left(1-\left(\sin_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^2\right)^{\frac{\delta}{d}} \geq 1-\frac{\delta}{d}.\left(\sin_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^2$$

qui entraîne

$$\sqrt{1-\left(1-\left(\sin_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^2\right)^{\frac{\delta}{d}}} \leq \sqrt{\frac{\delta}{d}}.\sin_{v,d}\left(\underline{x},\underline{y}\right)$$

c'est-à-dire

$$Dist_{v,\delta}\left(\underline{y},\underline{x}\right) \leq \sqrt{\frac{\delta}{d}}.Dist_{v,d}\left(\underline{y},\underline{x}\right) . \quad \square$$

## 2 - Distance d'un point à une hypersurface

***Proposition 3.6*** - *La distance d'indice* $(1,\ldots,1)\in \mathrm{N}^n$ *d'un point* $\underline{\mathrm{x}}$ *de* $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ *à une hypersurface* $Z$ *de degré* $d$ *d'équation réduite* $P(\underline{\mathrm{X}})=0$ *, en tout place* $v$ *, que l'on a notée* $Dist_v(\underline{\mathrm{x}},Z)$*, est*

$$Dist_v(\underline{\mathrm{x}},Z)=\frac{|P(\underline{\mathrm{x}})|_v}{M_v(P).\|\underline{\mathrm{x}}\|_v^d} \quad .$$

*Démonstration*

- Pour une place infinie $v$ .

L'homogénéité nous permet de prendre $\underline{\mathrm{x}}$ tel que $\|\underline{\mathrm{x}}\|_v=1$ , comme de plus la distance d'un point $\underline{\mathrm{x}}$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ à un sous-schéma est invariante par transformation unitaire de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$, comme on le justifiera au prochain paragraphe, on peut donc se ramener sans perte de généralité par une transformation unitaire de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ au cas $\underline{\mathrm{x}}=(1,0,\ldots,0)$.

Soit $R$ une forme éliminante d'indice $(1,\ldots,1,d)$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ , on a :

$$R=\mathrm{Re}\,s(L_1,\ldots,L_n,U_{n+1}) \qquad \text{où} \qquad L_j=\sum_{i=0}^{n}u_i^{(j)}X_i \qquad \text{pour} \qquad j=0,1,\ldots,n$$

$$\text{et} \qquad U_{n+1}=\sum_{|\underline{\alpha}|=d}u_{\underline{\alpha}}^{(n+1)}\underline{\mathrm{X}}^{\underline{\alpha}} \quad .$$

Considérons la spécialisation $\rho$ définie par :

$$\rho(U_{n+1})=P(\underline{\mathrm{X}}) \qquad \text{où} \qquad P(\underline{\mathrm{X}})=\sum_{|\underline{\alpha}|=d}\mu_{\underline{\alpha}}\underline{\mathrm{X}}^{\underline{\alpha}} \quad \text{et} \quad P(\underline{\mathrm{X}})=0 \text{ est l'équation de } Z\,.$$

Considérons la spécialisation $\rho_0$ définie par :

$$\rho_0(U_{n+1})=X_0^d \qquad \text{et} \qquad Z_0 \quad \text{l'hypersurface de } \mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v) \text{ d'équation } X_0=0 \;.$$

On remarque d'abord que $Dist_v(\underline{\mathrm{x}},Z_0)=1$ , car une forme éliminante $g$ d'indice $(1,\ldots,1)$ de $Z_0$ est :

$$g=\det\begin{pmatrix} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & \cdots & u_n^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} & \cdots & u_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \cdots & u_n^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{ce qui donne} \quad \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}}(g_v)=\det\begin{pmatrix} s_{0,1}^{(1)} & s_{0,2}^{(1)} & \cdots & s_{0,n}^{(1)} \\ s_{0,1}^{(2)} & s_{0,2}^{(2)} & \cdots & s_{0,n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{0,1}^{(n)} & s_{0,2}^{(n)} & \cdots & s_{0,n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

ce qui donne immédiatement le résultat souhaité.

La forme $f=\rho(R)$ est une forme éliminante d'indice $\underline{\mathrm{d}}=(1,\ldots,1)$ de $Z$ , dans ce cas $f_v$ et $\tilde{\delta}_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}}$ sont définis de la même façon quelque soit la place $v$ envisagée, nous les noterons respectivement, pour simplifier les notations, $\rho(R)$ et $\delta_{\underline{\mathrm{x}}}$ .

On a alors

$$Dist_v(\underline{\mathrm{x}},Z)=\frac{Dist_v(\underline{\mathrm{x}},Z)}{\left(Dist_v(\underline{\mathrm{x}},Z_0)\right)^d}=M_v^{(n)}\left(\frac{\rho_0(R)}{\rho(R)}\right).M_v^{(n)}\left(\frac{\delta_{\underline{\mathrm{x}}}(\rho(R))}{\delta_{\underline{\mathrm{x}}}(\rho_0(R))}\right)$$

- Dans un premier temps évaluons $M_v^{(n)}\left(\frac{\rho_0(R)}{\rho(R)}\right)$.

En appliquant le **Lemme 1** de [ P3 ] , on obtient

$$M_v^{(n)}\left(\frac{\rho_0(R)}{\rho(R)}\right)=\exp\left(\int_{\mathrm{P}_n}\log\left(\frac{|z_0|_v^d}{|P(\underline{z})|_v}\right).\Omega(\underline{z})^{\wedge n}\right)$$

qui d'après le ***lemme 2.11*** donne

$$\begin{aligned}M_v^{(n)}\left(\frac{\rho_0(R)}{\rho(R)}\right)&=\exp\left(\int_{S_{n+1}}\log\left(\frac{|x_0|_v^d}{|P(\underline{\mathrm{x}})|_v}\right).\sigma_{n+1}(\underline{\mathrm{x}})\right)\\&=\frac{\left(M_v(X_0)\right)^d}{M_v(P)}\\&=\frac{1}{M_v(P)}.\end{aligned}$$

- Evaluons maintenant $M_v^{(n)}\left(\frac{\delta_{\underline{\mathrm{x}}}(\rho(R))}{\delta_{\underline{\mathrm{x}}}(\rho_0(R))}\right)$ .

Cette fois, en appliquant le **Lemme 1'** de [ P3 ], on obtient

$$\log\left(M_v^{(n)}\left(\frac{\delta_{\underline{\mathrm{x}}}(\rho(R))}{\delta_{\underline{\mathrm{x}}}(\rho_0(R))}\right)\right)=\int_{\mathrm{P}_n-\{\underline{\mathrm{x}}\}}\log\left(\frac{|P(\underline{\mathrm{y}})|_v}{|y_0|_v^d}\right).\Omega_{\underline{\mathrm{x}}}(\underline{\mathrm{y}})^{\wedge n}+\log\left(|P(\underline{\mathrm{x}})|_v\right)\ \text{car}\ |x_0|_v=1$$

où $\Omega_{\underline{\mathrm{x}}}(\underline{\mathrm{y}})$ est la mesure définie par $\Omega_{\underline{\mathrm{x}}}(\underline{\mathrm{y}})=\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|_v^2$ et $\underline{z}=\left(\frac{z_1}{z_0},\ldots,\frac{z_n}{z_0}\right)$ .

D'autre part en posant $\tilde{P}(\underline{z})=P(1,z_1,\ldots,z_n)$ avec $\underline{z}=(z_1,\ldots,z_n)$

$$\begin{aligned}\int_{\mathrm{P}_n-\{\underline{\mathrm{x}}\}}\log\left(\frac{|P(\underline{\mathrm{y}})|_v}{|y_0|_v^d}\right).\Omega_{\underline{\mathrm{x}}}(\underline{\mathrm{y}})^{\wedge n}&=\int_{\mathrm{C}^n-\{\underline{0}\}}\log\left(|\tilde{P}(\underline{z})|_v\right).\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n}\\&=\lim_{\substack{R\to+\infty\\ r\to0}}\int_{B_n(R)-B_n(r)}\log\left(|\tilde{P}(\underline{z})|_v\right).\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n}\end{aligned}$$

Calculons alors $\int_{B_n(r)} \log\left(\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right).\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n}$ .

En remarquant que

$$\mathrm{dd^c}\log\left(\|\underline{z}\|^2\right)=\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2$$

on a

$$\mathrm{d}\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|.\mathrm{d^c}\log\left(\|\underline{z}\|^2\right)\wedge\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n-1}\right)=\mathrm{d}\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|\right)\wedge\mathrm{d^c}\log\left(\|\underline{z}\|^2\right)\wedge\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n-1}$$
$$+\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|\right)\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n}$$

mais on a aussi

$$\mathrm{d}\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|\right)\wedge\mathrm{d^c}\log\left(\|\underline{z}\|^2\right)\wedge\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n-1}=\mathrm{d}\left(\log\left(\|\underline{z}\|^2\right)\right)\wedge\mathrm{d^c}\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|\right)\wedge\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n-1}$$

qui donne en appliquant la formule de Stokes

$$\int_{B_n(r)}\log\left(\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right).\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n}=\int_{S_n(r)}\log\left(\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right).\mathrm{d^c}\log\left(\|\underline{z}\|^2\right)\wedge\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n-1}$$
$$-\int_{B_n(r)}\mathrm{d}\left(\log\left(\|\underline{z}\|^2\right)\right)\wedge\mathrm{d^c}\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|\right)\wedge\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n-1}.$$

Mais pour $\underline{z}\in S_n(r)$ , on a $\mathrm{d^c}\log\left(\|\underline{z}\|^2\right)\wedge\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n-1}=\sigma_n(\underline{z})$ , ce qui donne

$$\int_{B_n(r)}\log\left(\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right).\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n}=\int_{S_n(r)}\log\left(\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right).\sigma_n(\underline{z})$$
$$-\int_{B_n(r)}\mathrm{d}\left(\log\left(\|\underline{z}\|^2\right)\right)\wedge\mathrm{d^c}\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|\right)\wedge\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n-1}.$$

Or en appliquant la formule de Jensen , on a

$$\int_{S_n(r)}\log\left(\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right).\sigma_n(\underline{z})=\log\left(\left|\tilde{P}(0)\right|_v\right)+\int_0^r\left(\frac{(n-1)!}{\left(\pi\rho^2\right)^{n-1}}\int_{Z\cap B_n(r)}\mu_{n-1}\right)\frac{d\rho}{\rho}\quad .$$

D'autre part

$$\int_{B_n(r)} \mathrm{d}\left(\log\left(\|\underline{z}\|^2\right)\right) \wedge \mathrm{d}^c\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|\right) \wedge \left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n-1} = \int_0^r \left(\int_{S_n(\rho)} \mathrm{d}^c\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|\right) \wedge \left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|^2\right)^{\wedge n-1} \frac{2.d\rho}{\rho}\right)$$

et pour $\underline{z} \in S_n(\rho)$ , on a $\left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n-1} = \left(\frac{1}{-2i\pi\rho^2}\partial\overline{\partial}\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n-1}$ , ce qui donne

$$\int_{B_n(r)} \mathrm{d}\left(\log\left(\|\underline{z}\|_v^2\right)\right) \wedge \mathrm{d}^c\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right) \wedge \left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n-1} = \int_0^r \left(\int_{S_n(\rho)} \mathrm{d}^c\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right) \wedge \left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n-1}\right) \frac{2.d\rho}{\rho^{2n-1}} .$$

Mais

$$\int_{S_n(\rho)} \mathrm{d}^c\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right) \wedge \left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n-1} = \int_{B_n(\rho)} \mathrm{dd}^c\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right) \wedge \left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n-1}$$

et d'après l'équation de Lelong-Poincaré, on a

$\mathrm{dd}^c\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right) = \frac{1}{2}T_Z$ où $T_Z$ est le courant défini par la variété projective $Z$ ,

donc

$$\begin{aligned}\int_{S_n(\rho)} \mathrm{d}^c\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right) \wedge \left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n-1} &= \int_{B_n(\rho)} \frac{1}{2}T_Z \wedge \left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi^{n-1}} \int_{B_n(\rho)} T_Z \wedge \mu_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi^{n-1}} \int_{Z\cap B_n(\rho)} \mu_{n-1}\end{aligned}$$

et

$$\int_{B_n(r)} \mathrm{d}\left(\log\left(\|\underline{z}\|_v^2\right)\right) \wedge \mathrm{d}^c\left(\log\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right) \wedge \left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n-1} = \int_0^r \left(\frac{(n-1)!}{\pi^{n-1}} \int_{Z\cap B_n(\rho)} \mu_{n-1}\right) \frac{d\rho}{\rho^{2n-1}} ,$$

ce qui entraîne finalement

$$\int_{B_n(r)} \log\left(\left|\tilde{P}(\underline{z})\right|_v\right) . \left(\frac{1}{-2i\pi}\partial\overline{\partial}\log\|\underline{z}\|_v^2\right)^{\wedge n} = \log\left(\left|\tilde{P}(0)\right|_v\right)$$

et

$$\int_{\mathrm{P}_n - \{\underline{x}\}} \log\left(\frac{\left|P(\underline{y})\right|_v}{\left|y_0\right|_v^d}\right) . \Omega_{\underline{x}}(\underline{y})^{\wedge n} = 0 .$$

D'où le résultat

$$M_v^{(n)}\left(\frac{\delta_{\underline{x}}\left(\rho(R)\right)}{\delta_{\underline{x}}\left(\rho_0(R)\right)}\right)=\left|P(\underline{x})\right|_v \quad .$$

Ce qui donne, en remplaçant les deux résultats obtenus dans la première égalité :

$$Dist_v(\underline{x},Z)=\frac{\left|P(\underline{x})\right|_v}{M_v(P)}$$

- Pour une place finie $v$ .

L'homogénéité nous permet de prendre $\underline{x}$ tel que $\|\underline{x}\|_v=|x_0|_v=1$ ,

Une forme éliminante de $Z$ est $f=P(\Delta_0,\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$ où

$$\Delta_i=(-1)^i\det\begin{pmatrix} u_0^{(1)} & \cdots & u_{i-1}^{(1)} & u_{i+1}^{(1)}\cdots u_n^{(1)} \\ u_0^{(2)} & \cdots & u_{i-1}^{(2)} & u_{i+1}^{(2)}\cdots u_n^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\ \vdots\ \vdots \\ u_0^{(n)} & \cdots & u_{i-1}^{(n)} & u_{i+1}^{(n)}\cdots u_n^{(n)} \end{pmatrix} .$$

Ce qui entraîne immédiatement que

$$M_v^{(n)}(f_v)=M_v(P) \ .$$

D'autre part, pour tout $\underline{x}=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$, on a $\dfrac{\delta_{\underline{x}}(\Delta_i)}{\delta_{\underline{x}}(\Delta_0)}=\dfrac{x_i}{x_0}$ ce qui entraîne , dans le cas particulier considéré :

$$M_v^{(n)}\left(\delta_{\underline{x}}(f_v)\right)=\left(M_v^{(n)}\left(\delta_{\underline{x}}(\Delta_0)\right)\right)^d.\left|P(\underline{x})\right| \ .$$

Or on montre que $M_v^{(n)}\left(\delta_{\underline{x}}(\Delta_0)\right)=1$ , ce qui donne

$$Dist_v(\underline{x},Z)=\frac{\left|P(\underline{x})\right|_v}{M_v(P)} \ . \ \square$$

**Nota bene :**

La propriété *( iv )* de la ***Proposition 2.9*** nous permet alors d'écrire :

$$Dist_v(\underline{x},Z)\le\frac{\left|P(\underline{x})\right|_v}{\|\underline{x}\|_v}.\exp\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\overline{\mathrm{h}}(P)\right) . \ \square$$

## 3 - Distance d'un point à une sous-variété

### a ) Cas d'une sous-variété quelconque

***Lemme 3.7*** *- Soit $f$ une forme éliminante d'indice $(d_1,\ldots,d_r)\in \mathrm{N}^r$ d'une sous-variété $V$ de dimension $r$-1 de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ et $\underline{\mathrm{x}}$ un point de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$, alors en tout place $v$,*

$$M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},(d_1,\ldots,d_j)}(f_v)\right)\leq M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},(d_1,\ldots,d_{j-1})}(f_v)\right).\|\underline{\mathrm{x}}\|_v^{d_j.d^\circ_{\mathcal{U}_j}f} \quad \textit{pour } j=1,\ldots,r\ .$$

*( En posant pour $j$=1 , $M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},(d_1,\ldots,d_{j-1})}(f_v)\right)=M_v^{(r)}(f_v)$ . )*

*Démonstration*

Considérons un homomorphisme quelconque $\hat{\rho}_j'$ défini dans le premier paragraphe :

$$\hat{\rho}_j': \mathfrak{S}\mathrm{C}_v\left[d_1,\ldots,d_{j\text{-}1}\right]\times \mathrm{C}_v\left[d_{j+1},\ldots,d_r\right]\to \mathrm{C}_v$$

tel que :

- pour $1\leq k\leq j$-1 ,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\underline{\alpha}\prec\underline{\alpha}' \\ |\underline{\alpha}|=|\underline{\alpha}'|=d_k}} \left|\hat{\rho}_j'\left(s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(k)}\right)\right|_v^2=1 & \text{pour une place } v \text{ infinie} \\ \left|\hat{\rho}_j'\left(s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(k)}\right)\right|_v=1 & \text{pour une place } v \text{ infinie} \end{cases}$$

- pour $j$+1 $\leq k\leq r$ ,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\underline{\alpha}|=d_k} \left|\hat{\rho}_j'\left(u_{\underline{\alpha}}^{(k)}\right)\right|_v^2=1 & \text{pour une place } v \text{ infinie} \\ \left|\hat{\rho}_j'\left(u_{\underline{\alpha}}^{(k)}\right)\right|_v=1 & \text{pour une place } v \text{ infinie} \end{cases}$$

et $\hat{\rho}_j'\circ\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},(d_1,\ldots,d_{j-1})}(f_v)\neq 0$ .

L'idéal $\mathfrak{P}$ étant l'idéal de définition de $V$, l'ensemble

$$\mathcal{Y}'=\mathcal{Z}\left(\hat{\rho}_j'\circ\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},(d_1,\ldots,d_{j-1})}\left(\mathfrak{P}\left[d_1,\ldots,d_{j-1},d_{j+1},\ldots,d_r\right]\right)\right)$$

est un ensemble fini de points de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ et il existe $\lambda\in \mathrm{C}_v$ et $l_{\underline{\mathrm{y}}}\in \mathrm{N}$ tels que :

$$\hat{\rho}_j'\circ\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},(d_1,\ldots,d_{j-1})}(f_v)=\lambda\prod_{\underline{\mathrm{y}}\in\mathcal{Y}'}\left(U_{v,j}\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \qquad \text{et} \qquad \sum_{\underline{\mathrm{y}}\in\mathcal{Y}'} l_{\underline{\mathrm{y}}}=d^\circ_{\mathcal{U}_j}f\ .$$

Par conséquent

$$M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_j \circ \delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_{j-1})}(f_v)\right) = |\lambda|_v \prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}'} \|\underline{y}\|^{d_j.l_{\underline{y}}}$$

et

$$M_v^{(1)}\left(\delta_{v,\underline{x},d_j}\left(\hat{\rho}'_j \circ \delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_{j-1})}(f_v)\right)\right) = |\lambda|_v \prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}'}\left(Dist_{v,d_j}(\underline{x},\underline{y}).\|\underline{y}\|_v^{d_j}.\|\underline{x}\|_v^{d_j}\right)^{l_{\underline{y}}}$$

$$\leq |\lambda|_v \prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}'}\left(\|\underline{y}\|_v^{d_j}\right)^{l_{\underline{y}}}.\|\underline{x}\|_v^{d_j.d^\circ_{u_j} f}$$

car $Dist_{v,d_j}(\underline{x},\underline{y}) \leq 1$ .

On en déduit que

$$M_v^{(1)}\left(\delta_{v,\underline{x},d_j}\left(\hat{\rho}'_j \circ \delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_{j-1})}(f_v)\right)\right) \leq M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_j \circ \delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_{j-1})}(f_v)\right).\|\underline{x}\|_v^{d_j.d^\circ_{u_j} f}$$

et par intégration pour une place infinie et d'après les égalités ultramétriques pour une place finie, on obtient

$$M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_j)}(f_v)\right) \leq M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_{j-1})}(f_v)\right).\|\underline{x}\|_v^{d_j.d^\circ_{u_j} f} \ . \ \square$$

***Remarque :*** Comme $\dfrac{M_v^{(1)}\left(\tilde{\delta}_{\underline{x},d_j}\left(\hat{\rho}'_j \circ \delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_{j-1})}(f_v)\right)\right)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_j \circ \delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_{j-1})}(f_v)\right)\ \|\underline{x}\|_v^{d_j.d^\circ_{u_j} f}} = \prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(Dist_{v,d_j}(\underline{x},\underline{y}).\|\underline{y}\|_v^{d_j}\right)^{l_{\underline{y}}}$

et que $Dist_{v,d_j}(\underline{x},\underline{y}).\|\underline{y}\|_v^{d_j}$ est invariant par transformation unitaire de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$, on en déduit

que $\dfrac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_j)}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_{j-1})}(f_v)\right)\|\underline{x}\|_v^{d_j.d^\circ_{u_j} f}}$ est invariant par transformation unitaire,

et par conséquent $Dist_{v,\underline{d}}(\underline{x},V) = \displaystyle\prod_{j=1}^{r}\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_j)}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},(d_1,\dots,d_{j-1})}(f_v)\right)\|\underline{x}\|_v^{d_j.d^\circ_{u_j} f}}$ est bien invariant par transformation unitaire .

***Corollaire 3.8*** *- Soit $V$ une sous-variété de dimension $r$-1 de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ et $\underline{\mathrm{x}}$ un point de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$, alors en tout place $v$,*

$$Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}(\underline{\mathrm{x}},V) \leq 1 .$$

*Démonstration*

Grâce au ***Lemme 3.7***, on montre par récurrence que pour tout $j = 1,\ldots,r$, on a

$$M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},(d_1,\ldots,d_j)}(f_v)\right) \leq M_v^{(r)}(f_v).\|\underline{\mathrm{x}}\|_v^{\sum_{k=1}^{j} d_k.d°_{\mathcal{U}_k} f} .$$

Ce qui entraîne immédiatement pour $j = r$,

$$\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},(d_1,\ldots,d_r)}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}(f_v).\|\underline{\mathrm{x}}\|_v^{\sum_{k=1}^{r} d_k.d°_{\mathcal{U}_k} f}} \leq 1$$ , qui est le résultat attendu . □

On se propose maintenant de comparer $Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}(\underline{\mathrm{x}},V)$ et $Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}'}(\underline{\mathrm{x}},V)$ .

***Proposition 3.9*** *- Soient $V$ une sous-variété de dimension $r$-1 de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$, $\underline{\mathrm{x}}$ un point de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$, $\underline{\mathrm{d}} = (d_1,\ldots,d_{r-1},d_r) \in \mathrm{N}^r$ et $\underline{\mathrm{d}}' = (d_1,\ldots,d_{r-1},\delta) \in \mathrm{N}^r$ tels que $\delta \leq d_r$ . alors*

- *pour toute place infinie $v$*

$$Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}(\underline{\mathrm{x}},V) \leq Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}'}(\underline{\mathrm{x}},V).\left(\sqrt{\frac{d_r}{\delta}}\right)^{d°_{\mathcal{U}_r} f} .$$

- *pour toute place finie $v$*

$$Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}(\underline{\mathrm{x}},V) \leq Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}'}(\underline{\mathrm{x}},V) .$$

*Démonstration*

Par homogénéité de la formule, on peut, sans perte de généralité, considérer $\|\underline{\mathrm{x}}\|_v = 1$ .
Soient $f$ , $f'$ et $g$ trois formes élimantes de $V$ d'indices respectifs $\underline{\mathrm{d}} = (d_1,\ldots,d_{r-1},d_r)$, $\underline{\mathrm{d}}' = (d_1,\ldots,d_{r-1},\delta)$ et $\underline{\mathrm{d}}'' = (d_1,\ldots,d_{r-1},1)$ . Posons $\hat{\underline{\mathrm{d}}} = (d_1,\ldots,d_{r-1})$ .

Considérons un homomorphisme quelconque $\hat{\rho}'_r$ défini dans le premier paragraphe vérifiant:

- pour $1 \leq k \leq r\text{-}1$ ,

$$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{\underline{\alpha} \prec \underline{\alpha}' \\ |\underline{\alpha}|=|\underline{\alpha}'|=d_k}} \left|\hat{\rho}'_r\left(s^{(k)}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\right)\right|_v^2 = 1 & \text{pour une place } v \text{ infinie} \\ \left|\hat{\rho}'_r\left(s^{(k)}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\right)\right|_v = 1 & \text{pour une place } v \text{ infinie} \end{cases}$$

Si l'on appelle $\mathcal{Y}'$ l'ensemble fini de points de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ défini par $\mathcal{Y}' = \mathcal{Z}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}\left[\hat{\underline{\mathrm{d}}}\right]\right)\right)$, alors il existe $\lambda, \lambda', \lambda_1 \in \mathrm{C}_v$ et $l_{\underline{\mathrm{y}}} \in \mathrm{N}$ tels que :

$$\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f_v) = \lambda \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}'} \left(U_{v,r}\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \quad , \quad \hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f'_v) = \lambda' \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}'} \left(U'_{v,r}\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}}$$

$$\text{et} \qquad \hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(g_v) = \lambda_1 \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}'} \left(L_{v,r}\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}'} l_{\underline{\mathrm{y}}} = d°_{\mathcal{U}_r} f \; .$$

Ce qui donne alors

$$M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f_v)\right) = |\lambda|_v \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}'} \left(\left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v^{d_r}\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \quad , \quad M_v\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f'_v)\right) = |\lambda'|_v \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}'} \left(\left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v^{\delta}\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}}$$

$$\text{et} \qquad M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(g_v)\right) = |\lambda_1|_v \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}'} \left(\left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}}$$

ou encore

$$M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f_v)\right) = \left|\frac{\lambda}{(\lambda_1)^{d_r}}\right|_v M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(g_v)\right)^{d_r}$$

$$\text{et} \qquad M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f'_v)\right) = \left|\frac{\lambda'}{(\lambda_1)^{\delta}}\right|_v M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(g_v)\right)^{\delta} \; .$$

Or dans la démonstration de la *Proposition* (**2.8**) de [ P1 ] , *P. Philippon* montre que

$$\frac{\lambda}{(\lambda_1)^{d_r}} = k \in K_v^* \quad \text{et} \quad \frac{\lambda'}{(\lambda_1)^{\delta}} = k' \in K_v^* \quad \text{où } k \text{ et } k' \text{ sont indépendants de } \rho_r \; ,$$

car lorsqu'on spécialise $U_r$ en $L_r^{d_r}$ , $f$ se spécialise en $k.g^{d_r}$ et lorsqu'on spécialise $U'_r$ en $L_r^{\delta}$ , $f'$ se spécialise en $k'.g^{\delta}$

Par intégration pour une place infinie et en utilisant les égalités ultramétriques pour une place finie on obtient alors :

$$M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}\left(f_v\right)\right)=\left|k\right|_v M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}''}\left(g_v\right)\right)^{d_r} \qquad \text{et}$$
$$M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}'}\left(f_v'\right)\right)=\left|k'\right|_v M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}''}\left(g_v\right)\right)^{\delta} .$$

Considérons un homomorphisme quelconque $\hat{\rho}_r$ défini dans le premier paragraphe vérifiant:

- pour $1\leq k\leq r\text{-}1$ ,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\underline{\alpha}|=d_k}\left|\rho_j'\left(u_{\underline{\alpha}}^{(k)}\right)\right|_v^2=1 & \text{pour une place } v \text{ infinie} \\ \left|\rho_j'\left(u_{\underline{\alpha}}^{(k)}\right)\right|_v=1 & \text{pour une place } v \text{ infinie} \end{cases}$$

et $\hat{\rho}_r\left(f_v\right)\neq 0$ .

Si l'on appelle $\mathcal{Y}$ l'ensemble fini de points de $\mathrm{P}_n\left(\mathrm{C}_v\right)$ défini par $\mathcal{Y}=\mathcal{Z}\left(\hat{\rho}_r\left(\mathfrak{P}\left[\hat{\underline{d}}\right]\right)\right)$ , alors il existe $\mu,\mu',\mu_1\in\mathrm{C}_v$ et $l_{\underline{y}}\in\mathrm{N}$ tels que :

$$\hat{\rho}_r\left(f_v\right)=\mu\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}\left(\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}} \ , \ \hat{\rho}_r\left(f_v'\right)=\mu'\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}'\left(\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}} \quad \text{et} \quad \hat{\rho}_r\left(g_v\right)=\mu_1\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(L_{v,r}\left(\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}}$$

avec $\displaystyle\sum_{\underline{y}\in\mathcal{Y}'}l_{\underline{y}}=d^\circ{}_{\mathcal{U}_r}f$ .

De plus en reprenant la démonstration faite dans la *Proposition* (**2.8**) de [ P1 ] , on montre que :

$$\frac{\lambda}{\left(\lambda_1\right)^{d_r}}=\frac{\mu}{\left(\mu_1\right)^{d_r}}=k\in K_v^* \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda'}{\left(\lambda_1\right)^{\delta}}=\frac{\mu'}{\left(\mu_1\right)^{\delta}}=k'\in K_v^*$$

où $k$ et $k'$ sont indépendants de $\hat{\rho}_r'$ et $\hat{\rho}_r$ .

Ce qui nous amène, en faisant le même raisonnement que précédemment à

$$M_v^{(r)}\left(f_v\right)=\left|k\right|_v M_v^{(r)}\left(g_v\right)^{d_r} \qquad \text{et} \qquad M_v^{(r)}\left(f_v'\right)=\left|k'\right|_v M_v^{(r)}\left(g_v\right)^{\delta} .$$

Par conséquent

$$\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(f_v\right)\right)}{M_v^{(r)}\left(f_v\right)}=\left(\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}''}\left(g_v\right)\right)}{M_v^{(r)}\left(g_v\right)}\right)^{d_r} \qquad \text{et} \qquad \frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(f_v'\right)\right)}{M_v^{(r)}\left(f_v'\right)}=\left(\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}''}\left(g_v\right)\right)}{M_v^{(r)}\left(g_v\right)}\right)^{\delta} .$$

D'une part, d'après le ***Lemme 3.7***, on a $\dfrac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}'}(g_v)\right)}{M_v^{(r)}(g_v)} \leq 1$ et comme $\delta \leq d_r$ cela donne

$$\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}(f_v)} \leq \frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f'_v)\right)}{M_v^{(r)}(f'_v)} .$$

Et d'autre part, en reprenant les homomorphismes $\hat{\rho}'_r$ introduits précédemment, on obtient

$$M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f_v)\right) = |\lambda|_v \prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}'}\left(Dist_{v,d_r}(\underline{x},\underline{y})\|\underline{y}\|_v^{d_r}\right)^{l_{\underline{y}}}$$

et

$$M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f'_v)\right) = |\lambda'|_v \prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}'}\left(Dist_{v,\delta}(\underline{x},\underline{y})\|\underline{y}\|_v^{\delta}\right)^{l_{\underline{y}}}$$

ce qui entraîne

$$M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}} \circ \delta_{v,\underline{x},d_r}(f_v)\right) = M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f_v)\right)\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}'}\left(Dist_{v,d_r}(\underline{x},\underline{y})\right)^{l_{\underline{y}}}$$

et

$$M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}} \circ \delta_{v,\underline{x},\delta}(f'_v)\right) = M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f'_v)\right)\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}'}\left(Dist_{v,\delta}(\underline{x},\underline{y})\right)^{l_{\underline{y}}} .$$

Mais comme $Dist_{v,d_r}(\underline{x},\underline{y}) \leq \sqrt{\dfrac{d_r}{\delta}}.Dist_{v,\delta}(\underline{x},\underline{y})$ pour une place infinie

et $Dist_{v,\delta}(\underline{x},\underline{y}) = Dist_{v,d_r}(\underline{x},\underline{y})$ pour une place finie ,

on obtient

- pour une place infinie

$$\frac{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}} \circ \delta_{v,\underline{x},d_r}(f_v)\right)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f_v)\right)} \leq \frac{\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}} \circ \delta_{v,\underline{x},\delta}(f'_v)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f'_v)\right)}.\left(\sqrt{\frac{d_r}{\delta}}\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r} f}$$

et par intégration

$$\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f_v)\right)} \leq \frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}'}(f'_v)\right)}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f'_v)\right)}.\left(\sqrt{\frac{d_r}{\delta}}\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r} f}$$

qui conduit, par multiplication membre à membre avec l'inégalité précédemment obtenue, à

$$\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}\left(f_v\right)\right)}{M_v^{(r)}\left(f_v\right)} \leq \frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}'}\left(f_v'\right)\right)}{M_v^{(r)}\left(f_v'\right)} . \left(\sqrt{\frac{d_r}{\delta}}\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r} f}$$

c'est-à-dire

$$Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{x},V\right) \leq Dist_{v,\underline{d}'}\left(\underline{x},V\right) . \left(\sqrt{\frac{d_r}{\delta}}\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r} f} \quad .$$

- pour une place finie

$$\frac{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}_r' \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}} \circ \delta_{v,\underline{x},d_r}\left(f_v\right)\right)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}_r' \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(f_v\right)\right)} \leq \frac{\hat{\rho}_r' \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}} \circ \delta_{v,\underline{x},\delta}\left(f_v'\right)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}_r' \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(f_v'\right)\right)}$$

En utilisant les égalités ultramétriques et un raisonnement analogue au précédent, on obtient :

$$Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{x},V\right) \leq Dist_{v,\underline{d}'}\left(\underline{x},V\right) \quad . \quad \square$$

## *Nota bene*

Avec un raisonnement analogue et en itérant le procédé précédent, on obtient une comparaison de $Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{x},V\right)$ et de $Dist_v\left(\underline{x},V\right)$ où $\underline{d} = \left(d_1,\ldots,d_{r-1},d_r\right)$.

- pour une place infinie

$$Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{x},V\right) \leq Dist_v\left(\underline{x},V\right) . \prod_{k=1}^{r}\left(\sqrt{d_k}\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f} \quad ,$$

- pour une place finie

$$Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{x},V\right) \leq Dist_v\left(\underline{x},V\right) \quad . \quad \square$$

### b ) Cas d'une sous-variété linéaire

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons uniquement dans le cas d'une place infinie $v$ . Soit $V$ une sous-variété linéaire de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ de dimension $n$-$k$ . Considérons l'espace préhilbertien complexe $\mathrm{C}^{n+1}$ muni du produit scalaire

$$\langle \underline{\mathrm{x}} | \underline{\mathrm{y}} \rangle = \sum_{i=0}^{n} x_i \overline{y}_i \quad ,$$

et $\overline{V}$ le sous-espace de dimension $n$+1-$k$ associé à $V$. On note $\overline{V}^{\perp}$ le sous-espace orthogonal de $\overline{V}$ et $p_{V^{\perp}}$ la projection orthogonale de $\mathrm{C}^{n+1}$ sur $\overline{V}^{\perp}$ . On note de la même façon un vecteur $\underline{\mathrm{x}}$ de $\mathrm{C}^{n+1}$ et le point de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ dont il est un représentant.

D'après la ***Proposition 3.6***, dans le cas où $V$ un hyperplan projectif de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ d'équation $P(\underline{\mathrm{X}}) = 0$ , c'est-à-dire $k = 1$, on obtient :

$$Dist_v(\underline{\mathrm{x}}, V) = \frac{|P(\underline{\mathrm{x}})|_v}{M_v(P).\|\underline{\mathrm{x}}\|_v} = \frac{\|p_{V^{\perp}}(\underline{\mathrm{x}})\|_v}{\|\underline{\mathrm{x}}\|_v} \quad .$$

Nous allons montrer que ce résultat est vrai pour $k = 1, \ldots, n$ .

***Proposition 3.10*** - *Soit* $V$ *une sous-variété linéaire de dimension* $n-k$ *de* $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ *et* $\underline{\mathrm{x}}$ *un point de* $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$*, alors en tout place infinie* $v$ *et pour tout* $k = 1, \ldots, n$ *, on a*

$$Dist_v(\underline{\mathrm{x}}, V) = \frac{\|p_{V^{\perp}}(\underline{\mathrm{x}})\|_v}{\|\underline{\mathrm{x}}\|_v} \quad .$$

*Démonstration*

Considérons $\underline{\mathrm{x}}$ comme un vecteur $\mathrm{C}^{n+1}$ , alors $\underline{\mathrm{x}} = \alpha_k.e_k + \alpha_{k+1}.e_{k+1}$ où $e_k$ et $e_{k+1}$ sont deux vecteurs normés et orthogonaux respectivement de $\overline{V}^{\perp}$ et $\overline{V}$ . Considérons alors une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$ de $\overline{V}^{\perp}$ et une base orthonormée $(e_{k+1}, \ldots, e_{n+1})$ de $\overline{V}$ .

Soit $\mathcal{U}$ une transformation unitaire de $\mathrm{C}^{n+1}$ telle que $\mathcal{U}(e_j) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ est le $j^{ième}$ vecteur de la base canonique de $\mathrm{C}^{n+1}$ .

Dans cette base canonique de $\mathrm{C}^{n+1}$ , on a $\mathcal{U}(\underline{\mathrm{x}}) = \underline{\mathrm{x}'} = (0, \ldots, 0, \alpha_k, \alpha_{k+1}, 0, \ldots, 0)$ et l'image du sous-espace linéaire $\overline{V}$ par $\mathcal{U}$ est définie par une famille de $k$ formes linéaires de $\mathrm{C}_v[X_0, \ldots, X_n]$ de la forme

$$P^{(n-j)}(\underline{X}) = X_j \qquad \text{pour} \quad j = 0, \ldots, k-1$$

Si l'on note $\mathcal{U}(V)$ la sous-variété linéaire projective déduite de $\mathcal{U}(\overline{V})$ , la distance $Dist_v$ étant invariante par transformation unitaire, on a :

$$Dist_v(\underline{\mathrm{x}}, V) = Dist_v(\underline{\mathrm{x}'}, \mathcal{U}(V)) \ .$$

Une forme éliminante d'indice $(1,\ldots,1)\in \mathrm{N}^{n+1-k}$ de la sous-variété linéaire projective $\mathcal{U}(V)$ est alors :

$$f=\det\begin{pmatrix} u_0^{(1)} & \cdots & u_0^{(n+1-k)} & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ u_{k-1}^{(1)} & \cdots & u_{k-1}^{(n+1-k)} & 1 & \cdots & 0 \\ u_k^{(1)} & \cdots & u_k^{(n+1-k)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^{(1)} & \cdots & u_n^{(n+1-k)} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}=(-1)^{\frac{(k+1)(2n-k)}{2}}\det\begin{pmatrix} u_{k-1}^{(1)} & \cdots & u_{k-1}^{(n+1-k)} & 1 \\ u_k^{(1)} & \cdots & u_k^{(n+1-k)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_n^{(1)} & \cdots & u_n^{(n+1-k)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $f'=\det\begin{pmatrix} u_{k-1}^{(1)} & \cdots & u_{k-1}^{(n+1-k)} & 1 \\ u_k^{(1)} & \cdots & u_k^{(n+1-k)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_n^{(1)} & \cdots & u_n^{(n+1-k)} & 0 \end{pmatrix}$, alors $f'$ est une forme éliminante d'indice

$(1,\ldots,1)\in \mathrm{N}^k$ de $\mathcal{U}(V)$ considéré comme hyperplan projectif de $\mathrm{P}_{n+1-k}(\mathrm{C}_v)$.

Posons $\underline{\mathrm{x}}''=(\alpha_k,\alpha_{k+1},0,\ldots,0)$ , cette fois $\underline{\mathrm{x}}''$ est un représentant d'un point de $\mathrm{P}_{n+1-k}(\mathrm{C}_v)$.

On a immédiatement

$$Dist_v\left(\underline{\mathrm{x}}',\mathcal{U}(V)\right)=Dist_v\left(\underline{\mathrm{x}}'',\mathcal{U}(V)\right)$$

et comme d'après la ***Proposition 3.6***

$$Dist_v\left(\underline{\mathrm{x}}'',\mathcal{U}(V)\right)=\frac{|\alpha_k|_v}{\|\underline{\mathrm{x}}'\|_v}=\frac{\|p_{V^\perp}(\underline{\mathrm{x}})\|_v}{\|\underline{\mathrm{x}}\|_v}\ .$$

cela donne le résultat souhaité. □

## IV - Mesures, hauteurs, distances et intersections

Nous rappellerons dans ce paragraphe un certain nombre de définitions et de propriétés démontrées dans [ P1 ].

Considérons un corps de nombres $K$ et l'anneau des polynômes $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ pour tout entier $n \geq 1$.

Considérons un idéal homogène pur $\mathfrak{I}$ de $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ de codimension $n+1-r$ et $\underline{\mathrm{d}} = (d_1, \ldots, d_r) \in \mathrm{N}^r$, alors si $f$ est une forme éliminante d'indice $\underline{\mathrm{d}}$ de $\mathfrak{I}$, on a

$$d^\circ_{u_j} f \leq \deg \mathfrak{I} \times \prod_{k \neq j} d_k \,,$$

avec égalité si l'idéal $\mathfrak{I}$ est premier.

Si l'on appelle $d^\circ f$ le degré total de la forme éliminante $f$, nous aurons alors :

$$d^\circ f \leq \deg \mathfrak{I} \times \prod_{k=1}^{r} d_k \times \left( \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{d_k} \right) \,.$$

On appelle *degré d'indice* $\underline{\mathrm{d}}$ de $\mathfrak{I}$, le degré total de $f$ et on le notera $Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})$.

Soit $\hat{\underline{\mathrm{d}}} = (d_1, \ldots, d_{r-1}) \in \mathrm{N}^{r-1}$ et un homomorphisme $\rho : K[\underline{\mathrm{d}}] \longrightarrow K\left[\hat{\underline{\mathrm{d}}}\right]$ défini par:

$$\begin{cases} \rho\left(u_{\underline{\alpha}}^{(r)}\right) = \mu_{\underline{\alpha}} \in K & \text{avec } \left|\underline{\alpha}\right| = d_r \\ \rho\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right) = u_{\underline{\alpha}}^{(j)} & \text{pour } j = 1, \ldots, r-1 \quad \text{et} \quad \left|\underline{\alpha}\right| = d_j \,. \end{cases}$$

On suppose en plus que $\rho(U_r) \notin \mathfrak{P}$ où $\mathfrak{P}$ est un idéal premier associé à $\mathfrak{I}$, de manière à ce que $\rho(f)$ soit non nulle.

La forme $\rho(f)$ est une forme éliminante d'indice $\hat{\underline{\mathrm{d}}} \in \mathrm{N}^{r-1}$ de l'idéal de définition de $V \cap Z$ où $V$ est le sous-ensemble algébrique d'idéal de définition $\mathfrak{I}$ et $Z$ l'hypersurface d'équation réduite $\rho(U_r) = 0$.

Si l'on pose $g = \rho(f)$, alors $g_v = \rho_v^*(f_v)$ où $\rho_v^*$ est l'homomorphisme défini dans le premier paragraphe par :

$$\rho_v^* : \mathrm{C}_v[\underline{\mathrm{d}}] \longrightarrow \mathrm{C}_v\left[\hat{\underline{\mathrm{d}}}\right] \qquad \text{tel que}$$

$$\begin{cases} \rho_v^*\left(u_{\underline{\alpha}}^{(r)}\right) = \begin{pmatrix} d_r \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} \mu_{\underline{\alpha}} & \text{si la place } v \text{ est infinie,} \\ \rho_v^*\left(u_{\underline{\alpha}}^{(r)}\right) = \mu_{\underline{\alpha}} & \text{si la place } v \text{ est finie.} \end{cases}$$

et prolongé naturellement à $\mathrm{C}_v[\underline{\mathrm{d}}]$ .

On note alors $U_r^* = \begin{cases} \sum_{|\underline{\alpha}|=d_r} \binom{d_r}{\underline{\alpha}}^{-\frac{1}{2}} u_{\underline{\alpha}}^{(r)} X_{\underline{\alpha}} & \text{si la place } v \text{ est infinie,} \\ u_{\underline{\alpha}}^{(r)} X_{\underline{\alpha}} & \text{si la place } v \text{ est finie.} \end{cases}$

On remarque que $\rho\left(U_r^*\right)$ est une forme linéaire de $\mathrm{C}_v\left[\ldots, X_{\underline{\alpha}}, \ldots\right]$ avec $|\underline{\alpha}| = d_r$ . D'après la ***Proposition 2.3*** , on a

$$\begin{cases} M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right) = \left(\sum_{|\underline{\alpha}|=d_r} \frac{|\mu_{\underline{\alpha}}|_v^2}{\binom{d_r}{\underline{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{si la place } v \text{ est infinie,} \\ M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right) = \underset{|\underline{\alpha}|=d_r}{Max}\left(|\mu_{\underline{\alpha}}|_v\right) & \text{si la place } v \text{ est finie.} \end{cases}$$

Nous allons nous intéresser à la distance d'indice $\hat{\underline{\mathrm{d}}}$ d'un point $\underline{\mathrm{x}} = (x_0, \ldots, x_n)$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ à $V \cap Z$ mais pour cela nous faudra d'abord énoncer un théorème de Bézout arithmétique .

## 1 - Théorème de Bézout arithmétique

***Lemme 4.1*** - *Etant donnée une forme éliminante* $f\left(\underline{\mathrm{u}}^{(1)}, \ldots, \underline{\mathrm{u}}^{(r)}\right)$ *d'un idéal premier* $\mathfrak{P}$ *et une spécialisation* $\rho : K[d_r] \longrightarrow K$ *définie par :*

$$\rho\left(u_{\underline{\alpha}}^{(r)}\right) = \mu_{\underline{\alpha}} \in K \qquad avec \quad |\underline{\alpha}| = d_r \ ,$$

*pour toute place* $v$ *, on a :*

$$M_v^{(r-1)}\left(\rho_v^*(f_v)\right) \le M_v^{(r)}(f_v) \times \left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathrm{u}_r} f} \ .$$

*Démonstration*

Considérons un homomorphisme quelconque $\hat{\rho}_r$ défini au premier paragraphe

$$\hat{\rho}_r : \mathrm{C}_v\left[\hat{\underline{\mathrm{d}}}\right] \to \mathrm{C}_v$$

tel que pour $1 \le k \le r-1$ ,

$$\begin{cases} \sum_{|\underline{\alpha}|=d_k} \left|\hat{\rho}_r\left(u_{\underline{\alpha}}^{(k)}\right)\right|_v^2 = 1 & \text{si la place } v \text{ est infinie,} \\ \left|\hat{\rho}_r\left(u_{\underline{\alpha}}^{(k)}\right)\right|_v = 1 & \text{si la place } v \text{ est finie.} \end{cases}$$

et $\hat{\rho}_r(f_v) \neq 0$ .

Si l'on appelle $\mathcal{Y}$ l'ensemble fini de points de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ défini par $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}\left(\hat{\rho}_r\left(\mathfrak{P}\left[\underline{\hat{\mathrm{d}}}\right]\right)\right)$ ,
alors il existe $\lambda \in \mathrm{C}_v$ et $l_{\underline{\mathrm{y}}} \in \mathrm{N}$ tels que :

$$\hat{\rho}_r(f_v) = \lambda \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left(U_{v,r}(\underline{\mathrm{y}})\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \qquad \text{avec} \quad \sum_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} l_{\underline{\mathrm{y}}} = d^\circ_{\mathcal{U}_r} f \ .$$

Ce qui donne alors $M_v^{(1)}(\hat{\rho}_r(f_v)) = |\lambda|_v \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left(\|\underline{\mathrm{y}}\|_v^{d_r}\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}}$

$$M_v^{(1)}(\hat{\rho}_r(f_v)) = |\lambda|_v \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left(\|\underline{\mathrm{y}}\|_v^{d_r}\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}}$$

et

$$\left|\hat{\rho}_r \circ \rho_v^*(f_v)\right|_v = |\lambda|_v \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left|\rho_v^*\left(U_{v,r}(\underline{\mathrm{y}})\right)\right|_v^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \le |\lambda|_v \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left(\|\underline{\mathrm{y}}\|_v^{d_r}\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \times \left(M_v\left(\rho_v^*(U_r)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r} f}$$

( La dernière inégalité étant obtenue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour une place infinie et les égalités ultramétriques pour une place finie ) .

De ces deux relations, on déduit alors

$$\left|\hat{\rho}_r \circ \rho_v^*(f_v)\right|_v \le M_v^{(1)}(\hat{\rho}_r(f_v)) \times \left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r} f} \ .$$

Par intégration pour une place infinie et en utilisant les égalités ultramétriques pour une place finie, on obtient

$$M_v^{(r-1)}\left(\rho_v^*(f_v)\right) \le M_v^{(r)}(f_v) \times \left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r} f}$$

ce que nous voulions démontrer. □

***Remarque***

- Considérons une spécialisation $\rho' : \mathfrak{S}K[d_r] \longrightarrow K$ définie par :

$$\rho'\left(s^{(r)}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\right) = -\rho'\left(s^{(r)}_{\underline{\alpha}',\underline{\alpha}}\right) = \sigma_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'} \in K \qquad \text{avec} \quad |\underline{\alpha}| = |\underline{\alpha}'| = d_r \ \text{ et } \ \underline{\alpha} \prec \underline{\alpha}' \ .$$

On montre de la même façon que précédemment que

$$M_v^{(r-1)}\left(\rho'\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}}(f_v)\right)\right) \le M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}}(f_v)\right) \left(\sum_{\substack{|\underline{\alpha}|=|\underline{\alpha}|=d_r \\ \underline{\alpha} \prec \underline{\alpha}'}} \left|\sigma_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\right|_v^2\right)^{\frac{1}{2}} . \ □$$

Dans toute la suite, on note

$\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)$, le nombre défini par $\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)=\exp\left(\mathrm{h}(f)\right)$ ,

$\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(V\cap Z)$, celui défini par $\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(V\cap Z)=\exp\left(\mathrm{h}\left(\rho(f)\right)\right)$

puis

$$\mathrm{H}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)=\exp\left(\mathrm{h}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right) \quad \text{et} \quad \overline{\mathrm{H}}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)=\exp\left(\overline{\mathrm{h}}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right) \ .$$

***Corollaire 4.2*** - *Etant données une sous-variété V de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ de dimension r-1 et une hypersurface Z de degré $d_r$ et d'équation $\rho(U_r)=0$ telle que $V\not\subset Z$ , alors*

$$\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(V\cap Z)\leq \mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)\times\mathrm{H}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f} \ .$$

*Démonstration*

Ce corollaire se déduit immédiatement du ***Lemme 4.1*** et des définitions des hauteurs . □

Dans la suite de ce paragraphe, nous ne démontrerons les lemmes, propositions et corollaires que dans le cas d'une place infinie, celles dans le cas d'une place finie étant tout à fait semblables.

## 2 - Distance et intersection

***Lemme 4.3*** - *Avec les notations introduites dans les paragraphes précédents, on a l'inégalité:*

$$\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\rho^*\left(f_v\right)\right)\right)}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{\sum_{k=1}^{r-1}d_k.d^\circ_{\mathfrak{U}_k}f}M_v^{(r)}\left(f_v\right)}\leq\left(c_{v,1}\times\frac{\left|\rho\left(U_r\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right|_v}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{d_r}.\mathrm{M}_v}+\left\|\mathfrak{I}\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right\|_{v,\underline{\mathrm{d}}}\right)c'_{v,1}.\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f-1}.\mathrm{M}_v$$

*où* $\quad \mathrm{M}_v\geq M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)$,

$$c_{v,1}=\begin{cases}d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f.2^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f-1} & \textit{si v est une place infinie}\\ 1 & \textit{si v est une place finie}\end{cases}$$

*et*

$$c'_{v,1}=\begin{cases}\prod_{k=1}^{r-1}\left(\gamma_{N'_k}\right)^{\frac{d^\circ_{\mathfrak{U}_k}f}{2}} & \textit{si v est une place infinie}\\ 1 & \textit{si v est une place finie}\end{cases}$$

*Démonstration*

L'homogénéité de la formule nous permet sans perte de généralité, de prendre $\underline{x}$ tel que $\|\underline{x}\|_v = 1$ .

D'autre part si l'on considère une transformation unitaire $\mathcal{U}$ telle que $\underline{x} = \mathcal{U}(\underline{x}')$ alors en posant $P(\underline{x}) = \rho(U_r(\underline{x}))$ et $\rho'(U_r(\underline{x}')) = P \circ \mathcal{U}(\underline{x}') = P(\underline{x})$ . La **proposition 2** obtenue par M. Laurent dans [ La1 ] , nous permet d'écrire $M_v\left(\rho(U_r^*)\right) = M_v\left(\rho'(U_r^*)\right)$.

Enfin la distance d'un point à une sous-variété étant invariante par transformation unitaire, nous pourrons prendre $\underline{x}$ sous la forme $\underline{x} = (1,0,\ldots,0)$ .

Considérons alors l'homomorphisme $\overline{\rho} : \mathrm{C}_v[d_r] \longrightarrow \mathrm{C}_v$ défini par :

$$\begin{cases} \overline{\rho}\left(u_{\underline{\alpha}_0}^{(r)}\right) = 0 \quad \text{on} \quad \underline{\alpha}_0 = (d_r, 0, \ldots, 0), \\ \overline{\rho}\left(u_{\underline{\alpha}}^{(r)}\right) = \begin{pmatrix} d_r \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} \mu_{\underline{\alpha}} \quad \text{si} \quad \underline{\alpha} \neq \underline{\alpha}_0 \end{cases} .$$

On remarque que $\overline{\rho}\left(U_{v,r}(\underline{y})\right) = \sum_{|\underline{\alpha}|=d_r} \mu_{\underline{\alpha}}(\underline{y})^{\underline{\alpha}} - \rho(U_r(\underline{x}))\, y_0^{d_r}$ et que $\overline{\rho}\left(U_{v,r}(\underline{x})\right) = 0$ .

Considérons un homomorphisme quelconque $\hat{\rho}'_r$ défini dans le premier paragraphe

tel que pour $1 \le k \le r-1$ ,

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{\underline{\alpha} \prec \underline{\alpha}' \\ |\underline{\alpha}| = |\underline{\alpha}'| = d_k}} \left|\hat{\rho}'_r\left(s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(k)}\right)\right|_v^2 = 1 & \text{si la place } v \text{ est infinie,} \\ \left|\hat{\rho}'_r\left(s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(k)}\right)\right|_v = 1 & \text{si la place } v \text{ est finie.} \end{cases}$$

et $\hat{\rho}'_r(f_v) \neq 0$ .

Soit $\mathcal{Y}$ l'ensemble fini de points de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ défini par $\mathcal{Y} = \mathcal{Z}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(\mathfrak{P}\left[\hat{\underline{d}}\right]\right)\right)$ , alors il existe $\lambda \in \mathrm{C}_v$ et $l_{\underline{y}} \in \mathrm{N}$ tels que :

$$\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}(f_v) = \lambda \prod_{\underline{y} \in \mathcal{Y}} \left(U_{v,r}(\underline{y})\right)^{l_{\underline{y}}} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{\underline{y} \in \mathcal{Y}} l_{\underline{y}} = d^\circ_{\mathcal{U}_r} f \ .$$

Ce qui donne alors

$$M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(f_v\right)\right)=\left|\lambda\right|_v\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(\left\|\underline{y}\right\|_v^{d_r}\right)^{l_{\underline{y}}}\leq M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(f_v\right)\right)$$

et

$$M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}\left(f_v\right)\right)=\left|\lambda\right|_v\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(Dist_{v,d_r}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\left\|\underline{y}\right\|_v^{d_r}\right)^{l_{\underline{y}}}=\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(Dist_{v,d_r}\left(\underline{x},\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}}.M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(f_v\right)\right)$$

$$\leq M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}\left(f_v\right)\right)\quad .$$

( L'inégalité étant obtenue en itérant $r-1$ fois la remarque qui suit le ***Lemme 4.1*** .)

Mais d'autre part

$$\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\circ\rho_v^*\left(f_v\right)=\left(\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\circ\rho_v^*\left(f_v\right)-\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\circ\overline{\rho}\left(f_v\right)\right)+\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\circ\overline{\rho}\left(f_v\right)\quad ,$$

ce qui permet d'écrire pour tout homomorphisme $\hat{\rho}'_r$

$$\left|\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\circ\rho_v^*\left(f_v\right)\right|_v\leq\left|\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\circ\rho_v^*\left(f_v\right)-\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\circ\overline{\rho}\left(f_v\right)\right|_v+\left|\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\circ\overline{\rho}\left(f_v\right)\right|_v$$

$$\leq\left|\lambda\right|_v\left|\rho_v^*\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}\left(\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}}\right)-\overline{\rho}\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}\left(\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}}\right)\right|_v+\left|\lambda\right|_v\left|\overline{\rho}\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}\left(\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}}\right)\right|_v\quad .$$

où $\mathcal{Y}=\mathcal{Z}\left(\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(\mathfrak{P}\left[\hat{\underline{d}}\right]\right)\right)$ .

- Majorons d'abord $\left|\lambda\right|_v\left|\rho_v^*\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}\left(\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}}\right)-\overline{\rho}\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}\left(\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}}\right)\right|_v$ .

$$\left|\rho_v^*\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}\left(\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}}\right)-\overline{\rho}\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}\left(\underline{y}\right)\right)^{l_{\underline{y}}}\right)\right|_v=\left|\lambda\right|_v.\left|\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(\sum_{\left|\underline{\alpha}\right|=d_r}\mu_{\underline{\alpha}}\left(\underline{y}\right)^{\underline{\alpha}}\right)^{l_{\underline{y}}}-\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(\sum_{\left|\underline{\alpha}\right|=d_r}\mu_{\underline{\alpha}}\left(\underline{y}\right)^{\underline{\alpha}}-\rho\left(U_r\left(\underline{x}\right)\right)y_0^{d_r}\right)^{l_{\underline{y}}}\right|_v$$

$$\leq\left(\sum_{k=1}^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f}\binom{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f}{k}\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f-k}\left|\rho\left(U_r\left(\underline{x}\right)\right)\right|_v^k\right).\left|\lambda\right|_v.\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(\left\|\underline{y}\right\|_v^{d_r}\right)^{l_{\underline{y}}}$$

$$\leq d^\circ_{\mathcal{U}_r}f.\left|\rho\left(U_r\left(\underline{x}\right)\right)\right|_v\left(\sum_{k=0}^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f-1}\binom{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f-1}{k}\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f-1-k}\left|\rho\left(U_r\left(\underline{x}\right)\right)\right|_v^k\right).M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(f_v\right)\right)$$

$$\leq d^\circ_{\mathcal{U}_r}f.\left|\rho\left(U_r\left(\underline{x}\right)\right)\right|_v\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)+\left|\rho\left(U_r\left(\underline{x}\right)\right)\right|_v\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f-1}.M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\hat{\underline{d}}}\left(f_v\right)\right)$$

Comme

$$\left|\rho\left(U_r\left(\underline{x}\right)\right)\right|_v\leq\left(\sum_{\left|\underline{\alpha}\right|=d_r}\frac{\left|\mu_{\underline{\alpha}}\right|_v^2}{\binom{d_r}{\underline{\alpha}}}\right)^{\frac{1}{2}}=M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\quad ,$$

on obtient

$$|\lambda|_v.\left|\rho_v^*\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}(\underline{y})\right)^{l_{\underline{y}}}\right)-\overline{\rho}\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}(\underline{y})\right)^{l_{\underline{y}}}\right)\right|_v \leq d^\circ_{\mathcal{U}_r} f.|\rho(U_r(\underline{x}))|_v\left(2.M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f-1}.M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{\hat{d}}}(f_v)\right).$$

- Majorons maintenant $|\lambda|_v.\left|\overline{\rho}\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}(\underline{y})\right)^{l_{\underline{y}}}\right)\right|_v$ .

$$\begin{aligned}|\lambda|_v.\left|\overline{\rho}\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}(\underline{y})\right)^{l_{\underline{y}}}\right)\right|_v &= |\lambda|_v.\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left|\sum_{|\underline{\alpha}|=d_r}\mu_{\underline{\alpha}}(\underline{y})^{\underline{\alpha}}-\mu_{\underline{\alpha}_0}y_0^{d_r}\right|_v^{l_{\underline{y}}}\\ &= |\lambda|_v.\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left|\sum_{|\underline{\alpha}|=d_r}\mu_{\underline{\alpha}}\left(\underline{y}^{\underline{\alpha}}x_0^{d_r}-\underline{x}^{\underline{\alpha}}y_0^{d_r}\right)\right|_v^{l_{\underline{y}}}\\ &\leq\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f}.|\lambda|_v.\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(Dist_{v,d_r}(\underline{x},\underline{y}).\|\underline{y}\|_v^{d_r}\right)^{l_{\underline{y}}}\end{aligned}$$

qui donne, avec les remarques précédentes

$$|\lambda|_v.\left|\overline{\rho}\left(\prod_{\underline{y}\in\mathcal{Y}}\left(U_{v,r}(\underline{y})\right)^{l_{\underline{y}}}\right)\right|_v \leq\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f}.M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right) .$$

De ces deux majorations on déduit

$$\left|\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\underline{\hat{d}}}\circ\rho_v^*(f_v)\right|_v\leq\left(c_{v,1}.\frac{\left|\rho\left(U_r(\underline{x})\right)\right|_v}{\mathrm{M}_v}.M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{\hat{d}}}(f_v)\right)+M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right)\right).\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f-1}.\mathrm{M}_v$$

avec $\qquad c_{v,1}=d^\circ_{\mathcal{U}_r}f.2^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f-1}$ et $\mathrm{M}_v\geq M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)$ .

Comme d'après le ***Lemme 3.7*** , on a $M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{\hat{d}}}(f_v)\right)\leq M_v^{(r)}(f_v)$ , cela donne

$$\left|\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{x},\underline{\hat{d}}}\circ\rho_v^*(f_v)\right|_v\leq\left(c_{v,1}.\frac{\left|\rho\left(U_r(\underline{x})\right)\right|_v}{\mathrm{M}_v}.M_v^{(r)}(f_v)+M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right)\right).\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f-1}.\mathrm{M}_v$$

et après intégration

$$\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{\hat{d}}}\left(\rho^*(f_v)\right)\right)}{M_v^{(r)}(f_v)}\leq\left(c_{v,1}\times\frac{\left|\rho\left(U_r(\underline{x})\right)\right|_v}{\mathrm{M}_v}+\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}(f_v)}\right)c'_{v,1}.\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_r}f-1}.\mathrm{M}_v$$

avec $c'_{v,1}=\prod_{k=1}^{r-1}\left(\gamma_{N'_k}\right)^{d^\circ_{\mathcal{U}_k}f}$ .

Pour une place finie le même type de calcul donne :

$$\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\rho^*\left(f_v\right)\right)\right)}{M_v^{(r)}\left(f_v\right)} \leq Max\left(\frac{\left|\rho\left(U_r\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right|_v}{\mathrm{M}_v}, \frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}}\left(f_v\right)\right)}{M_v^{(r)}\left(f_v\right)}\right)\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f-1}.\mathrm{M}_v$$

ce qui nous conduit bien au résultat souhaité. □

***Corollaire 4.4*** - *Avec les notations introduites précédemment, on a les inégalités*

$$Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\mathrm{x}}, V\cap Z\right) \leq \left(c_{v,1}.\frac{\left|\rho\left(U_r\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right|_v}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{d_r}.M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)} + Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}}, V\right)\right)\times\left(\frac{\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(V\right)}{\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(V\cap Z\right)}\times\left(\mathrm{H}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f}\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}}.c'_{v,1}$$

*et*

$$Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\mathrm{x}}, V\cap Z\right) \leq \left(c_{v,1}.\frac{\left|\rho\left(U_r\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right|_v}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{d_r}.Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)} + Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}}, V\right)\right)\times\left(\frac{\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(V\right).\overline{\mathrm{H}}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)}{\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(V\cap Z\right)}\times\left(\mathrm{H}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f-1}\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}}.c'_{v,1}$$

*Démonstration*

D'après le ***Lemme 4.1***, on a :

$$n_w.\log\left[M_w^{(r-1)}\left(\rho_w^*\left(f_w\right)\right)\right] \leq n_w.\log\left(M_w^{(r)}\left(f_w\right)\right) + n_w\left(\log\left(M_w\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f-1}\right) + n_w.\log\mathrm{M}_w$$

où l'on prendra $\mathrm{M}_w = Max\left(1, M_w\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)$.

Ce qui permet d'écrire en ajoutant pour toutes les places $w \neq v$ et en divisant par $[K:\mathrm{Q}]$

$$\begin{aligned}\mathrm{h}\left(\rho\left(f\right)\right) - \frac{n_v}{[K:\mathrm{Q}]}.\log\left[M_v^{(r-1)}\left(\rho_v^*\left(f_v\right)\right)\right] \leq\; & \mathrm{h}\left(f\right) - \frac{n_v}{[K:\mathrm{Q}]}.\log\left(M_v^{(r)}\left(f_v\right)\right) \\ & + \left(d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f-1\right).\left[\mathrm{h}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right) - \frac{n_v}{[K:\mathrm{Q}]}.\log\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)\right] \\ & + \left[\overline{\mathrm{h}}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right) - \frac{n_v}{[K:\mathrm{Q}]}.\log\left(Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)\right)\right]\end{aligned}$$

en prenant l'exponentielle , on obtient :

$$\frac{\left(\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(V\cap Z\right)\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}}}{M_v^{(r-1)}\left(\rho_v^*\left(f_v\right)\right)} \leq \frac{\left(\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(V\right).\overline{\mathrm{H}}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}}}{M_v^{(r)}\left(f_v\right)}\times\left(\mathrm{H}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f-1\right)}\times\frac{1}{Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right).\left(M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r}f-1}}.$$

En multipliant membre à membre cette inégalité avec l'inégalité obtenue dans le ***Lemme 4.3***, dans laquelle on a pris $\mathrm{M}_w = Max\left(1, M_w\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)$ , on obtient :

$$Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\mathrm{x}}, V\cap Z\right) \leq \left( c_{v,1}.\frac{\left|\rho\left(U_r\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right|_v}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{d_r}.Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)} + Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}}, V\right)\right) \times \left( \frac{\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(V\right).\overline{\mathrm{H}}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)}{\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(V\cap Z\right)} \times \left(\mathrm{H}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{u_r}f-1}\right)^{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}} \times c'_{v,1} .$$

Si l'on fait le même raisonnement avec $\mathrm{M}_w = M_w\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)$ , on obtient

$$Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\mathrm{x}}, V\cap Z\right) \leq \left( c_{v,1}.\frac{\left|\rho\left(U_r\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right|_v}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{d_r}.M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)} + Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}}, V\right)\right) \times \left( \frac{\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(V\right)}{\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(V\cap Z\right)} \times \left(\mathrm{H}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{u_r}f}\right)^{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}} \times c'_{v,1} .$$

et l'on obtient bien les inégalités souhaitées. □

Nous allons établir maintenant une relation entre $\underset{\underline{\mathrm{y}}\in V}{Min}\, Dist_{v,d}\left(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\right)$ et $Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}}, V\right)$ . Pour cela nous aurons besoin d'établir le lemme suivant :

Nous aurons besoin dans la suite de ce paragraphe, du lemme suivant :

> ***Lemme 4.5*** - *Avec les notations introduites dans les paragraphes précédents, on a l'inégalité:*
>
> $$\frac{M_v^{(r)}\left(f_v\right).\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{d_1.\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{u_k}f}}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}_1}\left(f_v\right)\right)} \leq \left(\prod_{k=1}^{r}\left(\gamma_{N_k}\right)^{\frac{d^\circ_{u_k}f}{2}}\right)\left(\gamma_{N_1}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{u_k}f} .$$

*Démonstration*

Considérons pour cela l'homomorphisme $\tilde{\rho}: \mathrm{C}_v\left[\hat{\underline{\mathrm{d}}}_1\right] \longrightarrow \mathrm{C}_v\left[\hat{\underline{\mathrm{d}}}\right]$ défini par :

$$\tilde{\rho}\left(s^{(j)}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\right) = \left( \frac{\begin{pmatrix} d_1 \\ \hat{\underline{\alpha}}' \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{pmatrix} d_j \\ \underline{\alpha}' \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}} u^{(j)}_{\underline{\alpha}} u^{(1)}_{\hat{\underline{\alpha}}'} - \frac{\begin{pmatrix} d_1 \\ \hat{\underline{\alpha}} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\begin{pmatrix} d_j \\ \underline{\alpha} \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}}} u^{(j)}_{\underline{\alpha}'} u^{(1)}_{\hat{\underline{\alpha}}} \right) . \frac{1}{U_{v,1}\left(\underline{\mathrm{x}}\right).x_0^{d_j-d_1}} \qquad \text{pour} \quad j = 2,\ldots,r \quad \text{et} \quad \underline{\alpha} \neq \underline{\alpha}'$$

avec, pour $\underline{\alpha} = \left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$ tel que $\left|\underline{\alpha}\right| = d_j$ , les conventions suivantes :

- si $\alpha_0 \geq d_j - d_1$ alors $\hat{\underline{\alpha}} = \left(\alpha_0 - d_j + d_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$ , ce qui entraîne $\left|\hat{\underline{\alpha}}\right| = d_1$
- si $\alpha_0 < d_j - d_1$ alors $u^{(1)}_{\hat{\underline{\alpha}}} = 0$ .

On a alors

$$\tilde{\rho} \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}_1}\left(U_{v,j}\right) = U_{v,j} - \frac{U_{v,j}\left(\underline{\mathrm{x}}\right)}{x_0^{d_j - d_1}.U_{v,1}\left(\underline{\mathrm{x}}\right)} U_{v,1}.X_0^{d_j - d_1} \quad ,$$

ce qui entraîne , d'après la remarque faite à la suite du *Lemme* (**1.8)** de [ P1 ] que

$$\tilde{\rho} \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}_1}\left(f_v\right) = f_v \ .$$

Soit $\rho : \mathrm{C}_v\left[d_1,\ldots,d_r\right] \longrightarrow \mathrm{C}_v$ un homomorphisme quelconque tel que pour tout $j = 1,\ldots,r$ on a

$$\sum_{|\underline{\alpha}| = d_j} \left|\rho\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right)\right|_v^2 = 1 \ .$$

On a alors

$$\left|\rho\left(f_v\right)\right|_v = \left|\rho \circ \tilde{\rho} \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}_1}\left(f_v\right)\right|_v \ .$$

Considérons maintenant l'homomorphisme $\rho \circ \tilde{\rho}$ .

Pour $j = 1$ ,on a $\sum_{|\underline{\alpha}| = d_1} \left|\rho \circ \tilde{\rho}\left(u_{\underline{\alpha}}^{(1)}\right)\right|_v^2 = \sum_{|\underline{\alpha}| = d_1} \left|\rho\left(u_{\underline{\alpha}}^{(1)}\right)\right|_v^2 = 1$ ,

pour tout $j = 2,\ldots,r$ , comme $x_0 = 1$, on a

$$\sum_{\substack{|\underline{\alpha}| = |\underline{\alpha}'| = d_j \\ \underline{\alpha} \prec \underline{\alpha}'}} \left|\rho \circ \tilde{\rho}\left(s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(j)}\right)\right|_v^2 \leq \frac{1}{\left|\rho\left(U_{v,1}\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right|_v^2} . \sum_{\substack{|\underline{\alpha}| = |\underline{\alpha}'| = d_j \\ \underline{\alpha} \prec \underline{\alpha}'}} \left|\left(\frac{\binom{d_1}{\hat{\alpha}'}}{\binom{d_j}{\alpha'}}\right)^{\frac{1}{2}} .\rho\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right)\rho\left(u_{\underline{\hat{\alpha}}'}^{(1)}\right) - \left(\frac{\binom{d_1}{\hat{\alpha}}}{\binom{d_j}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} .\rho\left(u_{\underline{\alpha}'}^{(j)}\right)\rho\left(u_{\underline{\hat{\alpha}}}^{(1)}\right)\right|_v^2$$

Considérons les éléments $\underline{\mu} = \left(\ldots,\rho\left(u_{\underline{\alpha}'}^{(j)}\right),\ldots\right)$ et $\underline{\hat{\mu}} = \left(\ldots,\left(\frac{\binom{d_1}{\hat{\alpha}}}{\binom{d_j}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{2}} \rho\left(u_{\underline{\hat{\alpha}}}^{(1)}\right),\ldots\right)$ de

$\left(\mathrm{C}_v\right)^{N_j}$ ,
on a $\left\|\underline{\mu}\right\|_v = 1$ , $\left\|\underline{\hat{\mu}}\right\|_v \leq 1$

et

$$\sum_{\substack{|\underline{\alpha}|=|\underline{\alpha}'|=d_j\\ \underline{\alpha}\prec\underline{\alpha}'}}\left|\left(\frac{\begin{pmatrix}d_1\\ \hat{\alpha}'\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}d_j\\ \alpha'\end{pmatrix}}\right)^{\frac{1}{2}}.\rho\left(u_{\underline{\alpha}}^{(j)}\right)\rho\left(u_{\hat{\underline{\alpha}}'}^{(1)}\right)-\left(\frac{\begin{pmatrix}d_1\\ \hat{\alpha}\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}d_j\\ \alpha\end{pmatrix}}\right)^{\frac{1}{2}}.\rho\left(u_{\underline{\alpha}'}^{(j)}\right)\rho\left(u_{\hat{\underline{\alpha}}}^{(1)}\right)\right|_v^2 \leq \left(Dist_v\left(\underline{\mu},\hat{\underline{\mu}}\right).\left\|\underline{\mu}\right\|_v.\left\|\hat{\underline{\mu}}\right\|_v\right)^2 \leq 1\ ,$$

ce qui entraîne

$$\sum_{\substack{|\underline{\alpha}|=|\underline{\alpha}'|=d_j\\ \underline{\alpha}\prec\underline{\alpha}'}}\left|\rho\circ\tilde{\rho}\left(s_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}^{(j)}\right)\right|_v^2 \leq \frac{1}{\left|\rho\left(U_{v,1}\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right|_v^2}\quad ,$$

et par conséquent, en itérant la remarque qui suit le ***Lemme 4.1*** , on obtient

$$\left|\rho\circ\tilde{\rho}\circ\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}_1}\left(f_v\right)\right|_v \leq M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}_1}\left(f_v\right)\right)\frac{1}{\left|\rho\left(U_{v,1}\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right|_v^{\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}}$$

ou encore

$$\left|\rho\left(f_v\right)\right|_v\left|\rho\left(U_{v,1}\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right|_v^{\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f} \leq M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}_1}\left(f_v\right)\right)$$

ce qui par intégration donne

$$M_v^{(r)}\left(f_v\right)M_v^{(1)}\left(U_{v,1}\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)^{\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f} \leq M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}_1}\left(f_v\right)\right)\left(\prod_{k=1}^{r}\left(\gamma_{N_k}\right)^{\frac{d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}{2}}\right)\left(\gamma_{N_1}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}\quad .$$

Comme $M_v^{(1)}\left(U_{v,1}\left(\underline{\mathrm{x}}\right)\right)=\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{d_1}$ , on obtient

$$\frac{M_v^{(r)}\left(f_v\right).\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{d_1.\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}_1}\left(f_v\right)\right)} \leq \left(\prod_{k=1}^{r}\left(\gamma_{N_k}\right)^{\frac{d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}{2}}\right)\left(\gamma_{N_1}\right)^{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}\quad .\ \square$$

*Lemme 4.6 - Soit $V$ une sous-variété projective de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ de dimension $r-1$ , un point $\underline{\mathrm{x}} \in \mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ et $\underline{\mathrm{d}} = (d_1, \ldots, d_r) \in \mathrm{N}^r$ avec $d_1 \le d_j$ pour tout $j = 2, \ldots, r$ . Il existe au moins un point $\underline{\mathrm{y}} \in V$ tel que :*

$$Dist_{v,d}\left(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\right) \le \left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}}, V\right)\right)^{\frac{1}{d^{\circ}_{\mathcal{U}_1} f}} \times c_{v,2} \quad ,$$

*avec*

$$c_{v,2} = \begin{cases} 1 & \text{si } d^{\circ}_{\mathcal{U}_1} f = d = 1 \text{ et } v \text{ est une place infinie} \\ \left( \left( \prod_{k=1}^{r} \left(\gamma_{N_k}\right)^{\frac{d^{\circ}_{\mathcal{U}_k} f}{2}} \right) \left(\gamma_{N_1}\right)^{\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{r} d^{\circ}_{\mathcal{U}_k} f} \right)^{\frac{1}{d^{\circ}_{\mathcal{U}_1} f}} & \text{si } d^{\circ}_{U_1} f > 1 \text{ et } v \text{ est une place infinie} \\ 1 & \text{si } v \text{ est une place finie .} \end{cases}$$

*Démonstration*

- Traitons d'abord le cas où $d^{\circ}_{\mathcal{U}_1} f = d = 1$ .

Dans ce cas $V$ est une sous-variété linéaire et d'après la ***proposition 3.10*** ,

$$Dist_v\left(\underline{\mathrm{x}}, V\right) = \frac{\left\| p_{V^{\perp}}\left(\underline{\mathrm{x}}\right) \right\|_v}{\left\| \underline{\mathrm{x}} \right\|_v}$$

mais comme

$$\underline{\mathrm{y}} = \underline{\mathrm{x}} - p_{V^{\perp}}\left(\underline{\mathrm{x}}\right) \in V \quad \text{et} \quad Dist_v\left(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\right) = \sqrt{1 - \frac{\left|\left\langle \underline{\mathrm{x}} \middle| \underline{\mathrm{y}} \right\rangle\right|_v^2}{\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^2 \left\|\underline{\mathrm{y}}\right\|_v^2}} = \frac{\left\| p_{V^{\perp}}\left(\underline{\mathrm{x}}\right) \right\|_v}{\left\| \underline{\mathrm{x}} \right\|_v}$$

on obtient bien la conclusion souhaitée.

- Considérons le cas où $d^{\circ}_{\mathcal{U}_1} f > 1$ .

Comme pour le ***Lemme 4.3*** on peut, sans restriction, considérer un élément $\underline{\mathrm{x}} \in \mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ tel que $\underline{\mathrm{x}} = (1, 0, \ldots, 0)$ et de plus on peut supposer $\underline{\mathrm{x}} \notin V$ . On rappelle que $\hat{\underline{\mathrm{d}}}_1 = (d_2, \ldots, d_r)$ .

Considérons un homomorphisme quelconque $\hat{\rho}'_1 : \mathfrak{S}\mathrm{C}_v\left[\underline{\hat{\mathrm{d}}}_1\right] \longrightarrow \mathrm{C}_v$ ,
tel que pour tout $k = 2, \ldots, r$

$$\sum_{\substack{\underline{\alpha} \prec \underline{\alpha}' \\ |\underline{\alpha}| = |\underline{\alpha}'| = d_k}} \left| \hat{\rho}'_1\left(s^{(k)}_{\underline{\alpha}, \underline{\alpha}'}\right) \right|_v^2 = 1 \quad .$$

Supposons que pour tout $\hat{\rho}_1'$ , tel que $\hat{\rho}_1' \circ \delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v) \neq 0$ , on ait

$$\frac{M_v^{(1)}\left(\delta_{v,\underline{x},d_1}\left(\hat{\rho}_1' \circ \delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)\right)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}_1' \circ \delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)} > \frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)} ,$$

alors par intégration on obtient

$$\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)} > \frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)}$$

ce qui est absurde.

Donc il existe un homomorphisme $\hat{\rho}_1'$ tel que $\hat{\rho}_1' \circ \delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v) \neq 0$ vérifiant :

$$\frac{M_v^{(1)}\left(\delta_{v,\underline{x},d_1}\left(\hat{\rho}_1' \circ \delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)\right)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}_1' \circ \delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)} \leq \frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)} .$$

Comme d'après le ***lemme 4.5*** , on a

$$\frac{M_v^{(r)}(f_v).\|\underline{x}\|_v^{d_1.\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}}{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)} \leq \left(\prod_{k=1}^{r}(\gamma_{N_k})^{\frac{d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}{2}}\right)(\gamma_{N_1})^{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f} ,$$

on déduit

$$\frac{M_v^{(1)}\left(\delta_{v,\underline{x},d_1}\left(\hat{\rho}_1' \circ \delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)\right)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}_1' \circ \delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v)\right)} \leq \frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{x},\underline{d}}(f_v)\right)}{M_v^{(r)}(f_v).\|\underline{x}\|_v^{d_1.\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}} \left(\prod_{k=1}^{r}(\gamma_{N_k})^{\frac{d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}{2}}\right)(\gamma_{N_1})^{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f} .$$

Posons

$$c_{v,2}' = \left(\prod_{k=1}^{r}(\gamma_{N_k})^{\frac{d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f}{2}}\right)(\gamma_{N_1})^{\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{r} d^\circ_{\mathfrak{U}_k} f} .$$

En utilisant la remarque faite dans [ P1 ] après la *Proposition* (**2.4**), on peut écrire que

$$\hat{\rho}_1' \circ \delta_{v,\underline{x},\underline{d}_1}(f_v) = \lambda \prod_{h=1}^{t}\left((f_h)_v\right)^{l_h} \qquad \text{où } \lambda \in \mathrm{C}_v^* , \quad \sum_{h=1}^{t} l_h = d^\circ_{\mathfrak{U}_1} f$$

et $f_h$ sont des formes éliminantes d'indice $d_1$ de points $\underline{y}_h$ de $V$ .

Ce qui entraîne

$$\prod_{h=1}^{t}\left(Dist_{d_1}\left(\underline{\mathrm{y}}_h,\underline{\mathrm{x}}\right)\right)^{l_h}=\prod_{h=1}^{t}\left(\frac{M_v^{(1)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},d_1}\left(\left(f_h\right)_v\right)\right)}{M_v^{(1)}\left(\left(f_h\right)_v\right).\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{d_1}}\right)^{l_h}$$

$$\leq\frac{M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}}\left(f_v\right)\right)}{M_v^{(r)}\left(f_v\right).\left\|\underline{\mathrm{x}}\right\|_v^{d_1\cdot\sum_{k=1}^{r}d^{\circ}_{\mathfrak{U}_k}f}}.c'_{v,2}$$

$$\leq Dist_{d_1}\left(\underline{\mathrm{x}},V\right).c'_{v,2}$$

et par conséquent il existe au moins un point $\underline{\mathrm{y}}\in V$ , tel que

$$Dist_{v,d_1}\left(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}\right)\leq\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}},V\right)\right)^{\frac{1}{d^{\circ}_{\mathfrak{U}_1}f}}.c_{v,2}\quad .$$

avec $\quad c_{v,2}=\left(c'_{v,2}\right)^{\frac{1}{d^{\circ}_{\mathfrak{U}_1}f}}\quad .$

Pour une place finie un calcul analogue donne :

$$Dist_{v,d_1}\left(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}\right)\leq\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}},V\right)\right)^{\frac{1}{d^{\circ}_{\mathfrak{U}_1}f}}.c_{v,2}$$

avec $\quad c_{v,2}=1\quad .$ □

***Proposition 4.7*** - *On considère une sous-variété $V$ de dimension $r-1$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ et une hypersurface $Z$ de degré $d_r$ d'équation réduite $\rho(U_r)=0$ , telle que $V\not\subset Z$. Soit $\underline{\mathrm{x}}$ un point $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$.*

- *Si l'on suppose que l'on a, pour un réel positif $H$, l'inégalité :*

$$\frac{\left|\rho\left(U_r(\underline{\mathrm{x}})\right)\right|_v}{\|\underline{\mathrm{x}}\|_v^{d_r}.Max\left(1,M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)}\le\min_{\underline{\mathrm{y}}\in V}\left(H.\left(Dist_{v,d_r}\left(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}\right)^{\eta}\right)\right)\quad avec\ 0\le\eta\le 1\ .$$

*Alors on a*

$$Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\mathrm{x}},V\cap Z\right)\le\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}},V\right)\right)^{\eta}\times\left(\frac{\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)}{\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(V\cap Z)}\left(\overline{\mathrm{H}}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{U_r}f}\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}}\times c_{v,3}\ .$$

- *Si l'on suppose que l'on a, pour un réel positif $H$, l'inégalité :*

$$\frac{\left|\rho\left(U_r(\underline{\mathrm{x}})\right)\right|_v}{\|\underline{\mathrm{x}}\|_v^{d_r}.M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)}\le\min_{\underline{\mathrm{y}}\in V}\left(H.\left(Dist_{v,d_r}\left(\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{y}}\right)^{\eta}\right)\right)\quad avec\ 0\le\eta\le 1\ .$$

*Alors on a*

$$Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\mathrm{x}},V\cap Z\right)\le\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}},V\right)\right)^{\eta}\times\left(\frac{\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)}{\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(V\cap Z)}\left(\mathrm{H}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{U_r}f}\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}}\times c_{v,3}$$

*avec dans les deux cas*

$$c_{v,3}=\begin{cases}(1+H)^{d^\circ_{U_r}f} & si\ v\ est\ une\ place\ infinie\\ Max(1,H)^{d^\circ_{U_r}f} & si\ v\ est\ une\ place\ finie\,.\end{cases}$$

*Démonstration*

Nous ne ferons la démonstration que dans le premier cas, le second étant en tout point semblable.

Soit $f$ une forme éliminante d'indice $(d_1,\ldots,d_r)\in\mathrm{N}^r$ de la sous-variété $V$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ de dimension $r-1$ . Comme $V\not\subset Z$ , on a $\rho(f)\neq 0$.

On peut supposer sans perte de généralité que $\underline{\mathrm{x}}=(1,0,\ldots,0)$ .
Considérons de nouveau un homomorphisme quelconque $\hat{\rho}'_r$ défini au premier paragraphe.
Si l'on appelle $\mathcal{Y}$ l'ensemble fini de points de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ défini par
$\mathcal{Y}=Z\left(\hat{\rho}'_r\circ\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}'}\left(\mathfrak{P}\left[\hat{\underline{\mathrm{d}}}\right]\right)\right)$, où $\mathfrak{P}$ est l'idéal de définition de $V$, alors il existe $\lambda\in\mathrm{C}_v$ et $l_{\underline{\mathrm{y}}}\in\mathrm{N}$ tels que :

$$\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}}(f_v) = \lambda \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left( U_{v,r}(\underline{\mathrm{y}}) \right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \quad \text{avec} \quad \sum_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} l_{\underline{\mathrm{y}}} = d^{\circ}_{\mathcal{U}_r} f \ .$$

Ce qui donne alors

$$M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}}(f_v)\right) = |\lambda|_v \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left( \|\underline{\mathrm{y}}\|_v^{d_r} \right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \quad , \ M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}} \circ \rho_v^*(f_v)\right) = |\lambda|_v \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left( \rho_v^*(U_{v,r}) \right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}}$$

et $$\prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} Dist_{v,d_r}\left(\underline{\mathrm{y}}, \underline{\mathrm{x}}\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} = \frac{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}} \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},d_r}(f_v)\right)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}}(f_v)\right)} \ .$$

Cela entraîne

$$\frac{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}} \circ \rho_v^*(f_v)\right)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}}(f_v)\right)} = \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left( \frac{\left|\rho_v^*\left(U_{v,r}(\underline{\mathrm{y}})\right)\right|_v}{\left(\|\underline{\mathrm{y}}\|_v^{d_r}\right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}}} \right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \ .$$

L'homogénéité des deux égalités nous permet de supposer $\|\underline{\mathrm{y}}\|_v = 1$, alors d'après le ***Lemme 4.3*** , appliqué à $f = U_r\left(\underline{\mathrm{y}}\right)$, on a :

$$\left|\rho_v^*\left(U_{v,r}(\underline{\mathrm{y}})\right)\right|_v \le \left( \frac{\left|\rho\left(U_r(\underline{\mathrm{x}})\right)\right|_v}{\|\underline{\mathrm{x}}\|_v^{d_r} .Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)} + Dist_{v,d_r}\left(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\right) \right) \times Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)$$

car $d^{\circ}_{\mathcal{U}_r}\left(U_r\left(\underline{\mathrm{y}}\right)\right) = 1 \quad , \quad r - 1 = 0 \quad , \quad c_{v,1} = c'_{v,1} = 1$ .

Ce qui donne en faisant le produit des puissances $l_{\underline{\mathrm{y}}}$ de ces inégalités lorsque $\underline{\mathrm{y}}$ parcourt $\mathcal{Y}$

$$\frac{\left|\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}} \circ \rho_v^*(f_v)\right|_v}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}}(f_v)\right)} \le \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left( \frac{\left|\rho\left(U_r(\underline{\mathrm{x}})\right)\right|_v}{\|\underline{\mathrm{x}}\|_v^{d_r} .Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)} + Dist_{v,d_r}\left(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\right) \right)^{l_{\underline{\mathrm{y}}}} \times Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^{\circ}_{\mathcal{U}_r} f} \ .$$

Comme $Dist_{v,d_r}\left(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\right) \le 1$ et $0 \le \eta \le 1$ , on a $Dist_{v,d_r}\left(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\right) \le \left(Dist_{v,d_r}\left(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\right)\right)^{\eta}$

donc

$$\frac{\left|\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}} \circ \rho_v^*(f_v)\right|_v}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\hat{\mathrm{d}}}}(f_v)\right)} \le \prod_{\underline{\mathrm{y}} \in \mathcal{Y}} \left(Dist_{v,d_r}\left(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\mathrm{y}}\right)\right)^{\eta . l_{\underline{\mathrm{y}}}} \times \left( (1 + H) Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right) \right)^{d^{\circ}_{\mathcal{U}_r} f}$$

et par conséquent

$$\frac{\left|\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}} \circ \rho_v^*(f_v)\right|_v}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f_v)\right)} \leq \left(\frac{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}} \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},d_r}(f_v)\right)}{M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f_v)\right)}\right)^{\eta} \left((1+H)\, Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r} f}$$

et

$$\left|\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}} \circ \rho_v^*(f_v)\right|_v \leq M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}} \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},d_r}(f_v)\right)^{\eta} M_v^{(1)}\left(\hat{\rho}'_r \circ \delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f_v)\right)^{1-\eta} \left((1+H)\, Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r} f}.$$

Comme on a imposé à l'homomorphisme $\hat{\rho}'$ de vérifier :

$$\sum_{\substack{|\underline{\alpha}|=|\underline{\alpha}'|=d_j \\ \underline{\alpha}\prec\underline{\alpha}'}} \left|\hat{\rho}'\left(s^{(j)}_{\underline{\alpha},\underline{\alpha}'}\right)\right|_v^2 = 1 \qquad \text{pour} \quad j = 1,\ldots,r-1,$$

alors, par intégration, on obtient :

$$M_v^{(r-1)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}} \circ \rho_v^*(f_v)\right) \leq \left(M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}}(f_v)\right)\right)^{\eta} \left(M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f_v)\right)\right)^{1-\eta} \left((1+H)\, Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r} f}$$

et comme d'après le ***Lemme 3.7***

$$M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(f_v)\right) \leq M_v^{(r)}(f_v),$$

on obtient

$$M_v^{(r-1)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\hat{\underline{\mathrm{d}}}} \circ \rho_v^*(f_v)\right) \leq \left(M_v^{(r)}\left(\delta_{v,\underline{\mathrm{x}},\underline{\mathrm{d}}}(f_v)\right)\right)^{\eta} \left(M_v^{(r)}(f_v)\right)^{1-\eta} \left((1+H)\, Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r} f}.$$

Comme pour la démonstration du ***Corollaire 4.4***, on montre que :

$$\frac{\left(\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(V \cap Z)\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}}}{M_v^{(r-1)}\left(\rho_v^*(f_v)\right)} \leq \frac{\left(\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}}}{M_v^{(r)}(f_v)} \times \left(\overline{\mathrm{H}}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}.d^\circ_{\mathfrak{U}_r} f} \times \frac{1}{Max\left(1, M_v\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r} f}},$$

en multipliant membre à membre cette inégalité avec l'inégalité obtenue précédemment on obtient :

$$Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\underline{\mathrm{x}}, V \cap Z) \leq \left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}(\underline{\mathrm{x}}, V)\right)^{\eta} \times \left(\frac{\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}(V)}{\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(V \cap Z)} \left(\overline{\mathrm{H}}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r} f}\right)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}} \times c_{v,3}$$

avec $\quad c_{v,3} = (1+H)^{d^\circ_{\mathfrak{U}_r} f}$ .

Pour une place finie un calcul analogue donne

$$Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\mathrm{x}},V\cap Z\right)\leq\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\mathrm{x}},V\right)\right)^{\eta}\times\left(\frac{\mathrm{H}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(V\right)\times\left(\overline{\mathrm{H}}\left(\rho\left(U_r^*\right)\right)\right)^{d^{\circ}_{\mathfrak{U}_r}f}}{\mathrm{H}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(V\cap Z\right)}\right)^{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}}\times c_{v,3}$$

avec $c_{v,3}=Max\left(1,H\right)^{d^{\circ}_{\mathfrak{U}_r}f}$ . □

## V - Critères pour l'indépendance algébrique

Nous avons défini au paragraphe III la distance algébrique d'un point $\underline{\theta}$ à une sous-variété projective $\mathcal{Z}\left(\mathfrak{I}\right)$ notée $Dist_v\left(\underline{\theta},\mathcal{Z}\left(\mathfrak{I}\right)\right)$ , nous aurons besoin, dans ce paragraphe, de définir la distance ensembliste du point $\underline{\theta}$ à la sous-variété projective $\mathcal{Z}\left(\mathfrak{I}\right)$ notée $\mathrm{dist}_v$ et définie par :

$$\mathrm{dist}_v\left(\underline{\theta},\mathcal{Z}\left(\mathfrak{I}\right)\right)=\underset{\underline{\mathrm{y}}\in\mathcal{Z}(\mathfrak{I})}{Min}\left(Dist_v\left(\underline{\theta},\underline{\mathrm{y}}\right)\right) .$$

Si $Q\left(\underline{\mathrm{X}}\right)=\sum_{|\underline{\alpha}|=\delta}a_{\underline{\alpha}}\underline{\mathrm{X}}^{\underline{\alpha}}$ , on note $Q^*=\begin{cases}\sum_{|\underline{\alpha}|=\delta}\binom{\delta}{\underline{\alpha}}^{-\frac{1}{2}}a_{\underline{\alpha}}X_{\underline{\alpha}} & \text{pour une place infinie}\\ \sum_{|\underline{\alpha}|=\delta}a_{\underline{\alpha}}X_{\underline{\alpha}} & \text{pour une place finie .}\end{cases}$

### 1 - Cas général

**Théorème 5.1** *Soient* $K$ *un corps de nombres,* $v$ *une place quelconque de ce corps,* $k$ *un entier appartenant à* $[0,n]$ *et* $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_n)\in \mathrm{C}_v^{n+1}$ .
*Soient* $\delta,\tau,\sigma,\mu,\kappa$ *et* $U$ *des réels avec* $\mu\geq 0$ , $\sigma,\delta\geq 1$ *et* $\tau\geq\kappa\geq 0$ .
*On suppose qu'il existe:*

- *une suite strictement croissante de réels* $(S_i)_{0\leq i\leq l}$ *satisfaisant :*

*(o)* $0<S_0\leq\kappa+\log 2$ *et* $S_{l-1}<U\leq S_l$ ,

- *pour* $1\leq i\leq l$ *, une famille de polynômes homogènes* $(Q_{i,1},\dots,Q_{i,n_i})$ *de* $K[X_0,X_1,\dots,X_n]$ *telle que :*

*( i )* $d^\circ Q_{i,j}=\delta$ *pour tout* $j=1,\dots,n_i$ ,

*( ii )* $\overline{\mathrm{h}}(Q_{i,j}^*)\leq\tau$ *et* $\overline{\mathrm{h}}(Q_{i,j}^*)-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q_{i,j}^*\right)\right)\right)\leq\kappa$ *pour tout* $j=1,\dots,n_i$ ,

*( iii )* $\dfrac{\left|Q_{i,j}(\underline{\theta})\right|_v}{\|\underline{\theta}\|_v^{d^\circ Q_{i,j}}}\leq e^{-S_i}$ *pour tout* $j=1,\dots,n_i$ ,

*( iv ) les polynômes* $Q_{i,j}$ *sont sans zéros communs dans la boule* $B\left(\underline{\theta},e^{-(S_{i-1}+\mu)\sigma}\right)$ *de* $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ *de centre* $\underline{\theta}$ *et de rayon* $e^{-(S_{i-1}+\mu)\sigma}$ *pour la distance* $Dist_v$ .

*Soit* $\mathfrak{I}\subset K[X_0,X_1,\dots,X_n]$ *un idéal homogène de dimension* $k$ .

*Posons* $\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})=\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+(\tau+(k+1)\delta.\log(n+1)).Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})$ *où* $\underline{\mathrm{d}}=(\delta,\dots,\delta)\in\mathrm{N}^{k+1}$ .

*A ) Si la condition suivante est réalisée*

$$(\ v\ )\quad \sigma^k\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+k(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}\right)\leq U+(k+1)Min(\mu,\tau-\kappa)$$

*alors on a* $\mathrm{dist}_v(\underline{\theta},\mathcal{Z}(\mathfrak{I}))\geq-(U+\mu)\sigma$ .

*B ) Si la condition suivante est réalisée*

$$(\ v'\ )\quad \sigma^{k+1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+\left(\mu+\log 2+\frac{\log\delta}{2.\delta^k}\right)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})\right)\leq U+(k+1)Min(\mu,\tau-\kappa)$$

*alors on a* $\log\left(Dist_v(\underline{\theta},\mathcal{Z}(\mathfrak{I}))\right)\geq -U$ .

**Théorème 5.2** *Soient* $K$ *un corps de nombres,* $v$ *une place quelconque de ce corps,* $k$ *un entier appartenant à* $[0,n]$ *et* $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)\in \mathbb{C}_v^{n+1}$ .
*Soient* $\delta,\tau,\sigma,\mu$ *et* $U$ *des réels avec* $\mu\geq 0$ , $\sigma,\delta\geq 1$ *et* $\tau>0$ .

*On suppose qu'il existe:*
- *une suite strictement croissante de réels* $(S_i)_{0\leq i\leq l}$ *satisfaisant :*

*(o)* $0<S_0\leq \tau+\log 2$ *et* $S_{l-1}<U\leq S_l$ ,

- *pour* $1\leq i\leq l$ *, une famille de polynômes homogènes* $(Q_{i,1},\ldots,Q_{i,n_i})$ *de* $K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ *telle que :*

*( i )* $d^\circ Q_{i,j}=\delta$ *pour tout* $j=1,\ldots,n_i$ ,

*( ii )* $\overline{\mathrm{h}}(Q_{i,j}^*)\leq\tau$ *pour tout* $j=1,\ldots,n_i$ ,

*( iii )* $\dfrac{|Q_{i,j}(\underline{\theta})|_v}{\|\underline{\theta}\|_v^{d^\circ Q_{i,j}}.M_v(Q_{i,j}^*)}\leq e^{-S_i}$ *pour tout* $j=1,\ldots,n_i$ ,

*( iv ) les polynômes* $Q_{i,j}$ *sont sans zéros communs dans la boule* $B\left(\underline{\theta},e^{-(S_{i-1}+\mu)\sigma}\right)$ *de* $\mathrm{P}_n(\mathbb{C}_v)$ *de centre* $\underline{\theta}$ *et de rayon* $e^{-(S_{i-1}+\mu)\sigma}$ *pour la distance* $Dist_v$ .

*Soit* $\mathfrak{I}\subset K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ *un idéal homogène de dimension* $k$ .
*Posons* $\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})=\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+(\tau+(k+1)\delta.\log(n+1)).Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})$ *où* $\underline{\mathrm{d}}=(\delta,\ldots,\delta)\in\mathbb{N}^{k+1}$ .

*A ) Si la condition suivante est réalisée*

$$( v )\quad \sigma^k\left(\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+k(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}\right)\leq U$$

*alors on a*

$$\mathrm{dist}_v(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I}))\geq -(U+\mu)\sigma\ .$$

*B ) Si la condition suivante est réalisée*

$$( v')\quad \sigma^{k+1}\left(\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+\left(\mu+\log 2+\frac{\log\delta}{2.\delta^k}\right)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})\right)\leq U$$

*alors on a*

$$\log\left(Dist_v(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I}))\right)\geq -U\ .$$

Nous ne ferons que la démonstration du ***théorème 5.1*** , celle du ***théorème 5.2*** étant semblable dans sa structure et beaucoup plus simple au niveau des calculs.
Avant de démontrer ce théorème, démontrons le Lemme qui suit, dans lequel $\underline{\mathrm{d}}=(\delta,\ldots,\delta)\in \mathbb{N}^r$ et $\hat{\underline{\mathrm{d}}}=(\delta,\ldots,\delta)\in \mathbb{N}^{r-1}$ .

**Lemme 5.3 .** *Si l'on considère un idéal premier homogène $\mathfrak{P}_r$ de rang $n+1-r$ et un polynôme homogène $Q$ de degré $\delta$ de $K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ tels que :*

- $Q\notin \mathfrak{P}_r$ ,
- $\deg(Q)=\delta$ ,
- $\overline{\mathrm{h}}(Q^*)\leq \tau$ ,

*alors*

$$\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r,Q)\leq \mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r) \quad .$$

*D'autre part, chaque idéal premier homogène $\mathfrak{P}_{r-1}$ de rang $n+2-r$ associé à l'idéal $(\mathfrak{P}_r,Q)$ vérifie*

$$\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_{r-1})\leq \mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r) \ .$$

*Démonstration du Lemme.*
D'après le ***Corollaire 4.2*** , on a $\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r,Q)\leq \mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+\delta^{r-1}\deg(\mathfrak{P}_r).\overline{\mathrm{h}}(Q^*)$ .

Par conséquent

$$\begin{aligned}\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r,Q)&\leq \mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+\tau.\delta^{r-1}\deg(\mathfrak{P}_r)\\ &\leq \mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+\frac{\tau}{r}Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)\end{aligned}$$

et comme $r.Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r,Q)=(r-1)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)$ cela entraîne

$$\begin{aligned}\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r,Q)+\tau.Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r,Q)&\leq \mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+\frac{\tau}{r}Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+\tau\frac{r-1}{r}Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)\\ &\leq \mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+\tau.Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r,Q)\leq \mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r) \ .$$

D'après les propriétés d'additivité et de positivité des fonctions $\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}'}$ *et* $Deg_{\underline{\mathrm{d}}'}$ dans les décompositions primaires, on déduit que chaque idéal homogène premier $\mathfrak{P}_{r-1}$ de rang $n+2-r$ associé à l'idéal $(\mathfrak{P}_r,Q)$ est tel que :

$$\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_{r-1})\leq \mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r) \ .$$

*Démonstration du* ***théorème 5.1*** .

Pour la lisibilité de la démonstration, certains résultats ne seront énoncés qu'avec quelques indications, ils seront précédés de (*i* ) et on trouvera le détail de la démonstration en annexe.

- Plaçons nous dans le cas $A$ .

Supposons que $\log\left(\operatorname{dist}_v\left(\underline{\theta}, Z(\mathfrak{I})\right)\right) = \log\left(\underset{\underline{\mathrm{x}} \in Z(\mathfrak{I})}{Min}\left(Dist_v\left(\underline{\theta}, \underline{\mathrm{x}}\right)\right)\right) < -(U+\mu)\sigma$ .

Il existe alors un élément $\underline{\mathrm{x}} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $Z(\mathfrak{I})$ tel que

$$\log\left(Dist_v\left(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\theta}\right)\right) < -(U+\mu)\sigma < -(S_{l-1}+\mu)\sigma \quad .$$

On a alors $Z(\mathfrak{I}) \cap B\left(\underline{\theta}, e^{-(S_{l-1}+\mu)\sigma}\right) \neq \varnothing$. Si l'on suppose que pour chaque polynôme $Q_{l,j}$ , avec $j = 1, \ldots, n_{S_l}$ , on a $Z(\mathfrak{I}) \subset Z\left(Q_{l,j}\right)$ et le point $\underline{\mathrm{x}}$ de $Z(\mathfrak{I}) \cap B\left(\underline{\theta}, e^{-(S_{l-1}+\mu)\sigma}\right)$ est zéro commun à tous les polynômes $Q_{l,j}$ , ce qui contredit la propriété *( iv )* .

Par conséquent, il existe donc un entier $j \in \left[1, n_{S_l}\right]$ tel que $Q_{l,j} \notin \mathfrak{I}$ et l'idéal $\left(Q_{l,j}, \mathfrak{I}\right)$ est de rang $n+1-k$ .

D'après le ***corollaire 4.4***

$$\log\left(Dist_{v,\underline{\hat{d}}}\left(\underline{\theta}, Z\left(\mathfrak{I}, Q_{l,j}\right)\right)\right) < \log\left(c_{v,1} \cdot \frac{\left|Q_{l,j}(\underline{\theta})\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{\delta} . Max\left(1, M_v\left(Q_{l,j}^{*}\right)\right)} + Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{\theta}, Z(\mathfrak{I})\right)\right)$$
$$+ \frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}_{\underline{d}}(\mathfrak{I}) - \mathrm{h}_{\underline{\hat{d}}}\left(\mathfrak{I}, Q_{l,j}\right) + \overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^{*}\right)\frac{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{I})}{k+1}\right) + C_{k+1} \cdot \frac{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{I})}{k+1}$$

avec $c_{v,1} = d^{\circ}_{\mathfrak{U}_{k+1}} f . 2^{d^{\circ}_{\mathfrak{U}_{k+1}} f - 1}$ et $\begin{cases} C_{k+1} = \dfrac{k}{2}\log\left(\gamma_{N'}\right) & \text{si} \quad k < n \\ C_{k+1} = 0 & \text{si} \quad k = n . \end{cases}$

( On se réferera à la page 17 pour la définition de $\gamma_{N'}$ ).

Comme $S_l \geq U$ , d'après la propriété *( iii )*, on obtient

$$\frac{\left|Q_{l,j}(\underline{\theta})\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{\delta}} \cdot \left(\frac{\overline{\mathrm{H}}\left(Q_{l,j}^{*}\right)}{Max\left(1, M_v\left(Q_{l,j}^{*}\right)\right)}\right) \leq e^{-U+\kappa} \quad .$$

De plus d'après l'hypothèse faite et la ***Proposition 3.9***, on a

$$Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right).\overline{\mathrm{H}}\left(Q_{l,j}^{*}\right) < e^{-(U+\mu)\sigma+\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^{*}\right)}e^{\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{2}\log\delta}$$

$$< e^{-U+\tau-\mu}e^{\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{2}\log\delta}$$

qui entraîne

$$\left(c_{v,1}.\frac{\left|Q_{l,j}(\underline{\theta})\right|_{v}}{\left\|\underline{\theta}\right\|_{v}^{\delta}.Max\left(1,M_{v}\left(Q_{l,j}^{*}\right)\right)}+Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)\right).\overline{\mathrm{H}}\left(Q_{l,j}^{*}\right) < \left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}.2^{\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-1}+e^{\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{2}\log\delta}\right)e^{-U+Max(\kappa,\tau-\mu)}.$$

Une étude fastidieuse de fonction, prouve que

$$\text{(*1*)}\qquad \log\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}.2^{\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-1}+e^{\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{2}\log\delta}\right)+C_{k+1}.\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}\leq(k+1).\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}$$

et entraîne par conséquent

$$\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)\right)\right) < (k+1).\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-U+Max(\kappa,\tau-\mu)+\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}-1\right)\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^{*}\right)$$

$$+\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^{*}\right)\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-1\right)\right).$$

Comme d'autre part

$$-U\leq-\sigma^{k}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+k(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}\right)+(k+1)Min(\mu,\tau-\kappa)$$

et $(k+1).Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)=k.Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})$,

et que d'après le ***Lemme 5.3*** et la propriété *( ii )*

$$\text{(*2*)}\qquad -\sigma^{k}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^{*}\right)\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-1\right)\leq-\sigma^{k}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)-(k+1)\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-\tau$$

On obtient alors

$$\text{(*3*)}\qquad \log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)\right)\right) < -\sigma^{k}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)+(\mu+\log 2)Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)\right)+k.Min(\mu,\tau-\kappa).$$

D'après les propriétés d'additivité des fonctions $\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{d}}}\left(\underline{\theta},Z(\centerdot)\right)\right)$ , $t_{\tau,\hat{\underline{d}}}$ et $Deg_{\hat{\underline{d}}}$ et la positivité de $t_{\tau,\hat{\underline{d}}}$ et $Deg_{\hat{\underline{d}}}$ dans les décompositions primaires, il existe au moins un idéal premier $\mathfrak{P}_k$ vérifiant :

(a) $rang(\mathfrak{P}_k) = n+1-k$ ,

(b) $Deg_{\hat{\underline{d}}}(\mathfrak{P}_k) \le \dfrac{k}{k+1} Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{I})$ ,

(c) $t_{\tau,\hat{\underline{d}}}(\mathfrak{P}_k) \le t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{I})$ ,

(d) $\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{d}}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P}_k)\right)\right) < -\sigma^k\left(\dfrac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v} t_{\tau,\hat{\underline{d}}}(\mathfrak{P}_k) + (\mu+\log 2)Deg_{\hat{\underline{d}}}(\mathfrak{P}_k)\right) + k.Min(\mu,\tau-\kappa)$ .

- Plaçons nous dans le cas $B$ .

Supposons que $\log\left(Dist_v\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)\right) < -U$ . D'après le nota bene de la ***proposition 3.9*** , on a

$$\log\left(Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)\right) < -U + \frac{\log\delta}{2.\delta^k} Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{I}) \ .$$

La condition *( v' )* entraîne alors

$$\log\left(Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)\right) < -\sigma^{k+1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v} t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{I}) + (\mu+\log 2)Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{I})\right) + (k+1).Min(\mu,\tau-\kappa) .$$

D'après les propriétés d'additivité des fonctions $\log\left(Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{\theta},Z(\centerdot)\right)\right)$ , $t_{\tau,\underline{d}}$ et $Deg_{\underline{d}}$ et la positivité de $t_{\tau,\underline{d}}$ et $Deg_{\underline{d}}$ dans les décompositions primaires, il existe au moins un idéal premier $\mathfrak{P}_{k+1}$ vérifiant :

(a) $rang(\mathfrak{P}_{k+1}) = n-k$ ,

(b) $Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_{k+1}) \le Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{I})$,

(c) $t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{P}_{k+1}) \le t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{I})$ ,

(d) $\log\left(Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P}_{k+1})\right)\right) < -\sigma^{k+1}\left(\dfrac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v} t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{P}_{k+1}) + (\mu+\log 2)Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_{k+1})\right)$
$+(k+1).Min(\mu,\tau-\kappa)$ .

Montrons par récurrence, qu'il existe une suite d'idéaux premiers homogènes $\mathfrak{P}_r$ de $K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ pour $r = 1, \ldots, k$ dans le cas $A$ ( $r = 1, \ldots, k+1$ dans le cas $B$ ). vérifiant :

(a) $rang(\mathfrak{P}_r) = n + 1 - r$ ,

(b) $Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r) \leq \dfrac{r}{k+1} Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{I})$,

(c) $t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{P}_r) \leq t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{I})$

(d) $$\log\left(Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{\theta}, Z(\mathfrak{P}_r)\right)\right) < -\sigma^r \left( \frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v} t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{P}_r) + (\mu + \log 2) Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r) \right) + r.Min(\mu, \tau - \kappa).$$

Les quatre propriétés sont vérifiées par l'idéal premier $\mathfrak{P}_k$ dans le cas $A$ et par l'idéal premier $\mathfrak{P}_{k+1}$ dans le cas $B$.

- Supposons que pour $2 \leq r \leq k$ dans le cas $A$ ( ou $2 \leq r \leq k+1$ dans le cas $B$ ) il existe un idéal premier homogène $\mathfrak{P}_r$ vérifiant les quatre propriétés (a) , (b) , (c) et (d) . Montrons alors l'existence d'un idéal premier homogène $\mathfrak{P}_{r-1}$ vérifiant ces quatre propriétés.

Dans un premier temps montrons l'existence d'un indice $i_0$ tel que $1 \leq i_0 \leq l$ et d'un polynôme $Q_{i_0,j}$ de la famille associée à $i_0$ tel que :

$$rang\left(Q_{i_0,j}, \mathfrak{P}_r\right) = n + 2 - r \text{ , pour } r \geq 2 \text{ .}$$

D'après le ***Lemme 4.6 ,*** il existe un $\underline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ dans $Z(\mathfrak{P}_r)$ tel que

$$Dist_{v,\delta}(\underline{\theta}, \underline{x}) \leq \left(Dist_{v,\underline{d}}\left(\underline{\theta}, Z(\mathfrak{P}_r)\right)\right)^{\frac{r}{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}} .c_{v,2}$$

avec

$$c_{v,2} = \begin{cases} 1 & \text{si } Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r) = r \quad \text{ou si } v \text{ est une place finie} \\ \gamma_N^{\left(r-\frac{1}{2}\right)} & \text{sinon} \quad . \end{cases}$$

Comme d'après la ***proposition 3.5*** , on a $Dist_v(\underline{\theta}, \underline{x}) \leq Dist_{v,\delta}(\underline{\theta}, \underline{x})$, cela donne, en utilisant la propriété (d)

$$\log\left(Dist_v(\underline{\theta}, \underline{x})\right) \leq \frac{r}{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)} \left( -\sigma^r \left( \frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v} t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{P}_r) + (\mu + \log 2) Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r) \right) + r.Min(\mu, \tau - \kappa) \right) + \log\left(c_{v,2}\right).$$

D'autre part, on a

(*4*) $$\frac{r}{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}\left(-\sigma^r\left(\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)+(\mu+\log 2)Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)\right)+r.Min(\mu,\tau-\kappa)\right)+\log(c_{v,2})<-\sigma(\mu+\log 2+\kappa)$$

( cette relation étant encore vraie si $r=1$ et $Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_1)=1$ ).

Mais comme on a aussi

$$0<S_0\le\kappa+\log 2$$

cela entraîne

$$Dist_v(\underline{\theta},\underline{x})\le e^{-(S_0+\mu)\sigma} \quad .$$

Par conséquent, on a $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_r)\cap B\left(\underline{\theta},e^{-(S_0+\mu)\sigma}\right)\neq\emptyset$, considérons le plus grand entier $i_0$ tel que :

$$1\le i_0\le l \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Z}(\mathfrak{P}_r)\cap B\left(\underline{\theta},e^{-\left(S_{i_0-1}+\mu\right)\sigma}\right)\neq\emptyset \ .$$

D'après les hypothèses du critère, il existe donc une famille de polynômes homogènes $\left(Q_{i_0,1},\ldots,Q_{i_0,n_{i_0}}\right)$ de $K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ satisfaisant les propriétés *( i )* , *( ii )* , *(iii)* et *( iv )* .

Si l'on suppose que pour chaque polynôme $Q_{i_0,j}$ , avec $j=1,\ldots,n_{i_0}$ , on a $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_r)\subset\mathcal{Z}\left(Q_{i_0,j}\right)$ et le point $\underline{x}$ de $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_r)\cap B\left(\underline{\theta},e^{-\left(S_{i_0-1}+\mu\right)\sigma}\right)$ est un zéro commun à tous les polynômes $Q_{i_0,j}$ , ce qui contredit la propriété *( iv )* .

Il existe donc un entier $j\in\left[1,n_{S_{i_0}}\right]$ tel que $Q_{i_0,j}\notin\mathfrak{P}_r$ et l'idéal $\left(Q_{i_0,j},\mathfrak{P}_r\right)$ est de rang $n+2-r$ .

L'idéal $\left(Q_{i_0,j},\mathfrak{P}_r\right)$ vérifie $Deg_{\hat{\underline{d}}}\left(Q_{i_0,j},\mathfrak{P}_r\right)=\frac{r-1}{r}Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)$ , donc on a la propriété (b)

$$Deg_{\hat{\underline{d}}}\left(Q_{i_0,j},\mathfrak{P}_r\right)\le\frac{r-1}{k+1}Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{I}) \ .$$

D'après le ***lemme 5.2*** , l'idéal $\left(Q_{i_0,j},\mathfrak{P}_r\right)$ vérifie aussi la propriété (c)

$$t_{\tau,\hat{\underline{d}}}\left(Q_{i_0,j},\mathfrak{P}_r\right)\le t_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{I}) \ .$$

Montrons maintenant que l'idéal $\left(Q_{i_0,j},\mathfrak{P}_r\right)$ vérifie la propriété (d) .

Deux cas sont envisageables .

· Soit $i_0<l$ , alors on peut dire que tous les points de $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_r)$ sont relativement "éloignés" de $\underline{\theta}$ .

· Soit $i_0=l$ , alors on peut dire qu'il y a un point de $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_r)$ "proche" de $\underline{\theta}$ .

- Etudions le premier cas $i_0 < l$.

· Considérons $r \geq 2$.

On a par définition de $i_0$, $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_r) \cap B\left(\underline{\theta}, e^{-(S_{i_0}+\mu)\sigma}\right) = \emptyset$ et $i_0 < l$, ce qui entraîne que pour tout $\underline{\mathrm{x}} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{P}_r)$ on a:

$$\left(Dist_v\left(\underline{\theta}, \underline{\mathrm{x}}\right)\right)^{\frac{1}{\sigma}} > e^{-\left(S_{i_0}+\mu\right)} .$$

Mais

$$\frac{\left|Q_{i_0,j}\left(\underline{\theta}\right)\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{\delta}.Max\left(1, M_v\left(Q_{i_0,j}^*\right)\right)} \leq e^{-S_{i_0}-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q_{i_0,j}^*\right)\right)\right)}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{\left|Q_{i_0,j}\left(\underline{\theta}\right)\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{\delta}.Max\left(1, M_v\left(Q_{i_0,j}^*\right)\right)} &\leq e^{-\left(S_{i_0}+\mu\right)} e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q_{i_0,j}^*\right)\right)\right)} \\ &< e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q_{i_0,j}^*\right)\right)\right)}\left(Dist_v\left(\underline{\theta}, \underline{\mathrm{x}}\right)\right)^{\frac{1}{\sigma}} \\ &< e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q_{i_0,j}^*\right)\right)\right)}\left(Dist_{v,\delta}\left(\underline{\theta}, \underline{\mathrm{x}}\right)\right)^{\frac{1}{\sigma}} .\end{aligned}$$

En appliquant la ***Proposition 4.7***, avec $H = e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q_{i_0,j}^*\right)\right)\right)}$ et $\eta = \dfrac{1}{\sigma}$, on obtient

$$\begin{aligned}\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta}, \mathcal{Z}\left(\mathfrak{P}_r, Q_{i_0,j}\right)\right)\right) < \frac{1}{\sigma}\log\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta}, \mathcal{Z}\left(\mathfrak{P}_r\right)\right)\right) + \log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q_{i_0,j}^*\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)}{r} \\ +\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right) - \mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r, Q_{i_0,j}\right) + \overline{\mathrm{h}}\left(Q_{i_0,j}^*\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)}{r}\right).\end{aligned}$$

Nous remarquons alors que :

· $r.Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r, Q_{i_0,j}\right) = (r-1).Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)$

· d'après la propriété (d)

$$\frac{1}{\sigma}\log\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta}, \mathcal{Z}\left(\mathfrak{P}_r\right)\right)\right) < -\sigma^{r-1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right) + \left(\mu+\log 2\right)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)\right) + \frac{r}{\sigma}Min\left(\mu, \tau-\kappa\right)$$

· d'après le ***Lemme 5.3*** et la propriété *( ii )*

$$-\sigma^{r-1}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)+\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)}{r}\leq-\sigma^{r-1}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)-\left(k+1\right)\delta\log\left(n+1\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)}{r}-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)$$

Toutes ces remarques nous permettent alors d'écrire

(*5*) $$\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)\right)\right)<-\sigma^{r-1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+\left(\mu+\log 2\right)Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)\right)+\left(r-1\right)Min\left(\mu,\tau-\kappa\right).$$

- Etudions le second cas $i_0=l$, qui est celui étudié à la première étape

· Considérons $r\geq 2$ .

D'après le ***corollaire 4.4***

$$\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{P}_r,Q_{l,j}\right)\right)\right)<\log\left(c_{v,1}.\frac{\left|Q_{l,j}\left(\underline{\theta}\right)\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{\delta}.Max\left(1,M_v\left(Q^*_{l,j}\right)\right)}+Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{P}_r\right)\right)\right)$$
$$+\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{l,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{l,j}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right)}{r}\right)+C_r.\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)}{r}$$

avec $c_{v,1}=d^{\circ}_{\mathfrak{U}_r}f.2^{d^{\circ}_{\mathfrak{U}_r}f-1}$ et $\begin{cases}C_r=\dfrac{r-1}{2}\log\left(\gamma_{N'}\right) & \text{si } r\text{-}1\leq k<n\\ C_r=0 & \text{si } r\text{-}1=k=n.\end{cases}$

Comme $S_l\geq U$ , d'après la propriété *( iii )*

$$\frac{\left|Q_{l,j}\left(\underline{\theta}\right)\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{\delta}}.\left(\frac{\overline{\mathrm{H}}\left(Q^*_{l,j}\right)}{Max\left(1,M_v\left(Q^*_{l,j}\right)\right)}\right)\leq e^{-U+\kappa}\quad .$$

Or

$$-U\leq-\sigma^k\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right)+k\left(\mu+\log 2\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right)}{k+1}\right)+\left(k+1\right)Min\left(\mu,\tau-\kappa\right),$$

ce qui donne en grâce aux propriétés (b) et (c)

$$-U\leq-\sigma^{r-1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)+k\left(\mu+\log 2\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)}{r}\right)+\left(k+1\right)Min\left(\mu,\tau-\kappa\right)$$
$$\leq-\sigma^{r-1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)+\left(r-1\right)\left(\mu+\log 2\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)}{r}\right)+r.Min\left(\mu,\tau-\kappa\right).$$

De plus d'après la propriété (d) , on a

$$\begin{aligned}\log\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P}_r)\right)\right) &< -\sigma^{r-1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+(\mu+\log 2)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)\right)+r.Min(\mu,\tau-\kappa)\\ &< -\sigma^{r-1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+(r-1)(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\right)-\mu+r.Min(\mu,\tau-\kappa)\end{aligned}$$

et en posant

$$U'=\sigma^{r-1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+(r-1)(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\right)-r.Min(\mu,\tau-\kappa),$$

on obtient , comme dans la première étape

$$\frac{\left|Q_{l,j}(\theta)\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{\delta}}.\left(\frac{\overline{\mathrm{H}}\left(Q_{l,j}^*\right)}{Max\left(1,M_v\left(Q_{l,j}^*\right)\right)}\right)\leq e^{-U'+\kappa}\quad \text{et}\quad Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P}_r)\right).\overline{\mathrm{H}}\left(Q_{l,j}^*\right)<e^{-U'-\mu+\tau}$$

qui entraîne

$$\left(c_{v,1}.\frac{\left|Q_{l,j}(\theta)\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{\delta}.Max\left(1,M_v\left(Q_{l,j}^*\right)\right)}+Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P}_r)\right)\right).\overline{\mathrm{H}}\left(Q_{l,j}^*\right)<\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}.2^{\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}-1}+1\right)e^{-U'+Max(\kappa,\tau-\mu)}\ .$$

La même étude de fonction que pour (*1*) prouve que

$$\log\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}.2^{\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{k+1}-1}+1\right)+C_r.\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\leq(k+1).\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}$$

et le même calcul que celui de (*3*) donne

$$\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{P}_r,Q_{l,j}\right)\right)\right) < -\sigma^{r-1}\left(\frac{[K\text{:}\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{l,j}\right)+(\mu+\log 2)Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{l,j}\right)\right)+(r-1)Min(\mu,\tau-\kappa).$$

qui est la relation souhaitée.

Les quatre propriétés (a) , (b) , (c) et (d) sont donc vérifiées par l'idéal $\left(\mathfrak{P}_r,Q_{S_{i_0}}^{(j)}\right)$ . Grâce aux propriétés d'additivité des fonctions $\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},Z(\centerdot)\right)\right)$, $\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}$ et $Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}$ et de la positivité de $\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}$ et $Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}$ dans les décompositions primaires, il existe alors un idéal premier homogène $\mathfrak{P}_{r-1}$ de rang $n+2-r$ vérifiant les propriétés (b) , (c) et (d) . Ce qui achève la récurrence.

· Considérons le cas $r=1$ .

L'ensemble $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_1)$ est formé d'un point isolé $\underline{\mathrm{x}}=(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ donc $\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_1)$ est tel que

$$Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_1)=1 \quad \text{et} \quad Dist_v(\underline{\theta},\underline{\mathrm{x}})=Dist_v(\underline{\theta},\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_1)) \ .$$

On prouve alors d'une façon analogue à celle de la démonstration par récurrence, en prenant $r=1$ et $\log(c_{v,2})=0$ , l'existence d'un indice $i_0$ tel que $1\le i_0\le l$ et d'un polynôme $Q_{i_0,j}$ tel que $rang(Q_{i_0,j},\mathfrak{P}_1)=n+1$ .

Dans les deux cas $i_0<l$ et $i_0=l$ , on aboutit, par la même démonstration que celle faite dans la récurrence, à :

$$\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}.\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_1,Q_{i_0,j})+\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_1,Q_{i_0,j})\right)\right)<0$$

qui nous donne une contradiction car

$$\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}.\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_1,Q_{i_0,j})+\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},\mathcal{Z}(\mathfrak{P}_1,Q_{i_0,j})\right)\right)=0 \quad .$$

Par conséquent notre hypothèse est fausse et on a donc

dans le cas $A$ : $\quad \log\left(\mathrm{dist}_v(\underline{\theta},\mathcal{Z}(\mathfrak{I}))\right)\ge-(U+\mu)\sigma$

dans le cas $B$ : $\quad \log\left(Dist_v(\underline{\theta},\mathcal{Z}(\mathfrak{I}))\right)\ge-U$ . □

***Remarques***

1) Si le polynôme $Q_{i,j}$ est de degré $d_1$ $(0 < d_1 < \delta)$ et s'écrit $Q_{i,j}(\underline{X}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=d_1} \mu_{\underline{\alpha}} \underline{X}^{\alpha}$ .

Soit $k$, tel que $|\theta_k|_v = \max(\theta_0,\ldots,\theta_n)$. On peut, par changement d'indice, considérer $k=0$.

Posons alors $\underline{\theta}' = \left(1, \frac{\theta_1}{\theta_k}, \ldots, \frac{\theta_n}{\theta_k}\right)$ . on a alors $\|\underline{\theta}'\|_v \le \sqrt{n+1}$ .

Considérons le polynôme $P = X_0^{d_2}.Q_{i,j}$ tel que $d_1 + d_2 = \delta$ .

- Si $v$ est une place infinie

$$M_v\left(\omega_\delta^*(P)\right) = \sqrt{\sum_{|\underline{\alpha}'|=\delta} \frac{|\mu_{\underline{\alpha}}|_v^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}'}}} \qquad \text{et} \qquad M_v\left(\omega_{d_1}^*\left(Q_{i,j}\right)\right) = \sqrt{\sum_{|\underline{\alpha}|=d_1} \frac{|\mu_{\underline{\alpha}}|_v^2}{\binom{d_1}{\underline{\alpha}}}}$$

où $\underline{\alpha} = (\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ et $\underline{\alpha}' = (\alpha_0 + d_2, \alpha_1,\ldots,\alpha_n)$.

Comme $\binom{\delta}{\underline{\alpha}'} \ge \binom{d_1}{\underline{\alpha}}$, cela entraîne $M_v\left(\omega_\delta^*(P)\right) \le M_v\left(\omega_{d_1}^*\left(Q_{i,j}\right)\right)$ .

- Si $v$ est une place finie

$$M_v(P) = M_v\left(Q_{i,j}\right) = \underset{|\underline{\alpha}'|=\delta}{Max}\left(|\mu_{\underline{\alpha}}|_v\right) .$$

- Par conséquent, on a

$$\mathrm{h}\left(P^*\right) \le \mathrm{h}\left(Q_{i,j}^*\right) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathrm{h}}\left(P^*\right) \le \overline{\mathrm{h}}\left(Q_{i,j}^*\right) .$$

- On a aussi $\dfrac{|P(\underline{\theta})|_v}{\|\underline{\theta}\|_v^{d^\circ P}} = \dfrac{|Q_{i,j}(\underline{\theta})|_v}{\|\underline{\theta}\|_v^{d^\circ Q_{i,j}}}$ .

- D'autre part, les polynômes $P$ et $Q_{i,j}$ ont les mêmes zéros de la forme $(1,x_0,\ldots,x_n)$ . Par contre on introduit de nouveaux zéros de la forme $(0,x_1,\ldots,x_n)$

Il suffit alors, d'après la propriété *(i)* de la ***Proposition 3.4***, d'imposer la condition

$$(S_0 + \mu)\sigma > \frac{1}{2}\log(n+1) \ge \log\|\underline{\theta}'\|_v$$

pour que le polynômes $P$ n'aient pas de nouveaux zéros dans la boule de centre $\underline{\theta}$ et de rayon $e^{-(S_{i-1}+\mu)\sigma}$ pour la distance $Dist_v$ .

Par conséquent, on peut remplacer, dans le ***théorème 5.1*** , la propriété *( i )* par la propriété

$$(i)' \quad d^\circ Q_{i,j} \le \delta \quad \textit{pour tout} \;\; j = 1,\dots,n_i \;\; ,$$

à condition toute fois d'imposer $(S_0+\mu)\sigma > \frac{1}{2}\log(n+1)$ .

2) Montrons "l'équivalence" de la distance euclidienne dans la carte affine $X_0 \neq 0$, et la distance $Dist_v$ entre un élément de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ de la forme $\underline{\mathrm{x}} = (x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ et $\underline{\theta}' = \left(1, \frac{\theta_1}{\theta_0}, \dots, \frac{\theta_n}{\theta_0}\right)$ donné sur une boule centrée en $\underline{\theta}'$ telle que $Dist_v(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\theta}') \le R < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ .

Comme $Dist_v(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\theta}') < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \le \frac{1}{\|\underline{\theta}'\|_v}$ , d'après la propriété *(i)* de la ***Proposition 3.4***, on peut affirmer que $x_0 \neq 0$.

Prenons comme représentant de $\underline{\mathrm{x}}$ l'élément $\underline{\mathrm{x}} = (1, x_1, \dots, x_n)$ et posons

$$\hat{\underline{\mathrm{x}}} = (x_1, \dots, x_n) \qquad \text{et} \qquad \hat{\underline{\theta}} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}, \dots, \frac{\theta_n}{\theta_0}\right).$$

Comme on a

$$\|\hat{\underline{\mathrm{x}}}\|_v \le \|\hat{\underline{\mathrm{x}}} - \hat{\underline{\theta}}\|_v + \|\hat{\underline{\theta}}\|_v$$

on peut en déduire que

$$\frac{1}{1 + \left(R + \|\hat{\underline{\theta}}\|_v\right)^2} \le \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \|\hat{\underline{\mathrm{x}}}\|_v^2\right)\left(1 + \|\hat{\underline{\theta}}\|_v^2\right)}} \quad .$$

D'où l'on déduit grâce à la propriété *(ii)* de la ***Proposition 3.4***

$$k(\underline{\theta}')\|\hat{\underline{\mathrm{x}}} - \hat{\underline{\theta}}\|_v \le Dist_v(\underline{\mathrm{x}}, \underline{\theta}') \le \|\hat{\underline{\mathrm{x}}} - \hat{\underline{\theta}}\|_v \quad ,$$

ce qui nous permet de remplacer dans la propriété *( iv )* la boule de centre $\underline{\theta}$ de $\mathrm{P}_n(\mathrm{C}_v)$ pour la distance $Dist_v$ par une boule euclidienne de la carte affine $X_0 \neq 0$ , à condition d'imposer $(S_0+\mu)\sigma > \frac{1}{2}\log(n+1)$ , comme on l'a vu dans la remarque précédente . □

Nous allons établir , un corollaire de la forme de celui de *E-M Jabbouri* de [ J1 ].

**Corollaire 5.4 (Critère de Jabbouri)** *Soient* $K$ *un corps de nombres, v une place quelconque de ce corps,* $k$ *un entier appartenant à* $[0,n]$ *et* $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)\in \mathbb{C}_v^{n+1}$ .

*Soient* $\delta,\tau,\sigma$ *et* $U$ *des réels avec* $\tau>0$ *,* $\sigma,\delta\geq 1$ *,* $\sigma^{k+1}<\tau$ *et* $\frac{\tau}{\sigma^{k+1}}<\left[\frac{U}{\sigma^{k+1}}\right]$ .

*On suppose que pour tout entier* $S$ *vérifiant :*

*(o)* $\frac{\tau}{\sigma^{k+1}}<S\leq \frac{U}{\sigma^{k+1}}$ ,

*il existe une famille de polynômes homogènes* $\left(Q_{S,1},\ldots,Q_{S,n_S}\right)$ *de* $K\left[X_0,X_1,\ldots,X_n\right]$ *telle que :*

*( i )* $d^\circ Q_{S,j}\leq\delta$ *pour tout* $j=1,\ldots,n_S$ ,

*( ii )* $\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{S,j}^{*}\right)\leq\tau$ *pour tout* $j=1,\ldots,n_S$ ,

*( iii )* $\frac{\left|Q_{S,j}(\underline{\theta})\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{d^\circ Q_{S,j}}}\leq e^{-S\sigma^{k+1}}$ *pour tout* $j=1,\ldots,n_S$ ,

*( iv ) les polynômes* $Q_{S,j}$ *sont sans zéros communs dans la boule* $B\left(\underline{\theta},e^{-S\sigma^{k+2}}\right)$ *de* $\mathbb{C}_v^n$ *de centre* $\underline{\theta}$ *et de rayon* $e^{-S\sigma^{k+2}}$ .

*Soit* $\mathfrak{I}\subset K\left(X_0,X_1,\ldots,X_n\right)$ *un idéal homogène de dimension* $k$ .
*Posons* $\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})=\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+\left(\tau+(k+1)\delta.\log(n+1)\right).Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})$ *où* $\underline{\mathrm{d}}=(\delta,\ldots,\delta)\in\mathbb{N}^{k+1}$ .
*Si la condition suivante est réalisée*

$$( v )\ \frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+\left(\log 2+\frac{\log\delta}{2.\delta^k}\right)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})\leq\left[\frac{U}{\sigma^{k+1}}\right].\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} ,$$

*alors on a*

$$\log\left(Dist_v\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)\right)\geq -U .$$

*Démonstration*

Posons d'abord $\mu=0$ et $\kappa=\tau$ . On obtient alors $Min(\mu,\tau-\kappa)=0$ .

Indexons les entiers $S$ de façon naturelle en posant $S_i=\left[\frac{\tau}{\sigma^{k+1}}\right]+i$ pour $i=1,\ldots,l$ et $S_0=\left[\frac{\tau}{\sigma^{k+1}}\right]$ .

Posons $\sigma'=\left(\frac{S_1}{S_1-1}\right)\sigma$ , on a bien évidemment $1\leq\sigma<\sigma'\leq 2\sigma$ .

Posons maintenant $S_i'=S_i.\sigma^{k+1}$ pour $i=0,\ldots,l$ . On a alors $S_0'\leq\tau+\log 2$ .

De plus, si pour $i=1,\ldots,l$ on pose $Q_{i,j}=Q_{S_i,j}$ , d'après *( iii )* , on a :

$$\frac{\left|Q_{i,j}\left(\underline{\theta}\right)\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v^{d^\circ Q_{i,j}}}\leq e^{-S'_i} \quad .$$

D'autre part, pour $i\geq 1$ , $\sigma'=\left(\dfrac{S_1}{S_1-1}\right)\sigma\geq\left(\dfrac{S_i}{S_{i-1}}\right)\sigma$ ce qui donne $S_{i-1}\sigma'\geq S_i\sigma$

et par conséquent

$$S'_{i-1}\sigma'=S_{i-1}.\sigma^{k+1}.\sigma'\geq S_i.\sigma^{k+2} \quad .$$

Donc pour $i\geq 1$ , on a $B\left(\underline{\theta},e^{-S'_{i-1}\sigma'}\right)\subset B\left(\underline{\theta},e^{-S_i\sigma^{k+2}}\right)$, ce qui implique que les polynômes $Q_{i,j}$ sont sans zéros communs dans la boule $B\left(\underline{\theta},e^{-S'_{i-1}\sigma'}\right)$ de $\mathrm{P}_n\left(\mathrm{C}_v\right)$ de centre $\underline{\theta}$ et de rayon $e^{-S'_{i-1}\sigma'}$ pour la distance $Dist_v$ .

De plus $S_l$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\dfrac{U}{\sigma^{k+1}}$ , ce qui entraîne

$$S_{l-1}<\left[\frac{U}{\sigma^{k+1}}\right]=S_l \ .$$

Posons $U'=\left[\dfrac{U}{\sigma^{k+1}}\right].\sigma^{k+1}$, on obtient alors

$$S'_{l-1}<U'\leq S'_l \qquad \text{et} \qquad \frac{U'}{\sigma'^{k+1}}=\left[\frac{U}{\sigma^{k+1}}\right].\left(\frac{\sigma}{\sigma'}\right)^{k+1}\geq\left[\frac{U}{\sigma^{k+1}}\right].\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right) .$$

La relation *( v )* entraîne alors

$$\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right)+\left(\log 2+\frac{\log\delta}{2.\delta^k}\right)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right)\leq\frac{U'}{\sigma'^{k+1}} \ .$$

On peut alors appliquer le ***Théorème 5.1*** qui nous donne la conclusion

$$\log\left(Dist_v\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{I}\right)\right)\right)\geq -U'\geq -\left[\frac{U}{\sigma^{k+1}}\right]\sigma^{k+1}\geq -U \ . \ \square$$

***Remarque :***

On peut améliorer le coefficient de la propriété *( v )* en remplaçant $\dfrac{1}{2}$ par $a=\dfrac{\left[\dfrac{\tau}{\sigma^{k+1}}\right]}{\left[\dfrac{\tau}{\sigma^{k+1}}\right]+1}$

qui est compris entre $\dfrac{1}{2}$ et $1$ . $\square$

## 2 - Cas linéaire

Ecrivons un corollaire du ***théorème 5.1***, pour lequel nous nous placerons dans le cas où $K = \mathrm{Q}$ et la place $v$ est archimédienne qui sont les hypothèses du critère établi par *Y.V. Nesterenko* dans [ N1 ] , critère que déduisons de ce corollaire.

Dans ce cas, pour simplifier les notations nous omettrons les indices $v$ .

**Corollaire 5.5**

*Soient* $k$ *un entier appartenant à* $[0,n]$ *et* $\underline{\theta} = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathrm{C}_v^{n+1}$ .

*Soient* $\tau, \mu, \varepsilon$ *et* $U$ *des réels avec* $\mu \geq \tau$ , $1 \geq \varepsilon \geq 0$ *et* $\varepsilon.\tau + \log 2 < U$ .

*On suppose qu'il existe:*

- *une suite strictement croissante de réels* $(S_i)_{0 \leq i \leq l}$ *satisfaisant :*

*(o)* $0 < S_0 \leq \varepsilon.\tau + \log 2$ *et* $S_{l-1} < U \leq S_l$ .

- *pour* $1 \leq i \leq l$ *, une famille de formes linéaires* $\left(L_{i,1}, \dots, L_{i,n_i}\right)$ *de* $\mathrm{Z}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ *telle que :*

*( i )* $\overline{\mathrm{h}}\left(L_{i,j}\right) \leq \tau$ *pour* $j = 1, \dots, n_i$ ,

*( ii )* $\dfrac{\left|L_{i,j}(\underline{\theta})\right|}{\left\|\underline{\theta}\right\|} \leq e^{-S_i}$ *pour* $j = 1, \dots, n_i$ ,

*( iii ) les polynômes* $L_{i,j}$ *pour* $j = 1, \dots, n_i$ *sont sans zéros dans la boule* $B\left(\underline{\theta}, e^{-(S_{i-1}+\mu)}\right)$ *de* $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ *de centre* $\underline{\theta}$ *et de rayon* $e^{-(S_{i-1}+\mu)}$ *pour la distance Dist* .

*Soit* $\mathfrak{L} \subset \mathrm{Q}[X_0, X_1, \dots, X_n]$ *un idéal homogène de dimension* $k$ *de degré* $1$ *. Si la condition suivante est réalisée*

*( iv )* $\mathrm{h}(\mathfrak{L}) + (k+1)^2 \log(n+1) + k.(\mu + \log 2) \leq U - (k+1).\varepsilon.\tau$ ,

*alors on a*

$$\log\left(Dist\left(\underline{\theta}, Z(\mathfrak{L})\right)\right) \geq -(U + \mu) .$$

*Démonstration*

On remarque d'abord que si les formes linéaires $L_{i,j}$ sont à coefficients entiers,

$$\overline{\mathrm{h}}\left(L_{i,j}^{*}\right)=\overline{\mathrm{h}}\left(L_{i,j}\right)=\log\left(M_{v}\left(L_{i,j}\right)\right)$$

donc on peut prendre $\kappa=\varepsilon.\tau$ et par conséquent la condition $\tau\leq\mu$ implique :

$$Min\left(\mu,\tau-\kappa\right)=\tau-\varepsilon.\tau\ .$$

Posons maintenant $\sigma=1$.

Comme $Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{L}\right)=k+1$ et $\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{L}\right)=\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{L}\right)+\left(k+1\right)\tau+\left(k+1\right)^{2}\log\left(n+1\right)$, la propriété *( v' )* du ***Théorème 5.1*** est

$$\mathrm{h}\left(\mathfrak{L}\right)+\left(k+1\right)^{2}\log\left(n+1\right)+k.\left(\mu+\log 2\right)\leq U-\left(k+1\right)\varepsilon.\tau\ .$$

On peut alors appliquer le cas A du ***Théorème 5.1*** , mais comme dans le cas linéaire on a

$$\underset{\underline{\mathrm{x}}\in Z(\mathfrak{L})}{Min}\left(Dist_{v}\left(\underline{\theta},\underline{\mathrm{x}}\right)\right)=Dist_{v}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{L}\right)\right)$$

cela nous donne

$$\log\left(Dist_{v}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{L}\right)\right)\right)\geq-\left(U+\mu\right)\ .\ \square$$

Nous allons établir maintenant le critère de *Y.V. Nesterenko* démontré dans [ N1] , mais pour cela nous avons besoin de comparer le volume et la hauteur d'un sous-espace vectoriel rationnel de $\mathrm{C}^{n+1}$ .

On considère un sous-espace vectoriel rationnel $\mathfrak{L}$ de $\mathrm{C}^{n+1}$ de dimension $k+1$ , ensemble des zéros communs aux $n-k$ formes linéaires :

$$L_j\left(\underline{\mathrm{X}}\right)=\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}.X_i \qquad \text{pour} \qquad j=1,\ldots,n+1-k \quad \text{avec} \quad a_{i,j}\in \mathrm{Z} \ .$$

On rappelle que

$$V\left(\mathfrak{L}\right)=\left(\det\left\|\left\langle \underline{\mathrm{a}}_k \,|\, \underline{\mathrm{a}}_l\right\rangle\right\|\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{où} \quad \left\langle \underline{\mathrm{a}}_k \,|\, \underline{\mathrm{a}}_l\right\rangle=\sum_{j=0}^{n} a_{k,j}.a_{l,j} \quad \text{avec} \quad \underline{\mathrm{a}}_j=\left(a_{0,j},\ldots,a_{n,j}\right) \ .$$

Comme on considère la place archimédienne $v$ de $\mathrm{Q}$, si l'on appelle $f$ une forme éliminante de la variété linéaire projective de $\mathrm{P}_n\left(\mathrm{C}\right)$ déduite de $\mathfrak{L}$, on a

$$\overline{\mathrm{H}}\left(\mathfrak{L}\right)=M_v^{(k+1)}\left(f\right) \ ,$$

c'est-à-dire, d'après le résultat obtenu dans le quatrième exemple de paragraphe II-3-a)

$$\overline{\mathrm{H}}\left(\mathfrak{L}\right)=V\left(\mathfrak{L}\right).\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\right) .$$

Il est à noter que ce résultat peut être retrouvé en utilisant les résultats exposés par *J.B. Bost*, *H. Gillet* et *C. Soulé* dans [ BGS1 ] .

**Corollaire 5.6 ( Critère de Nesterenko)**
*Soient* $k$ *un entier appartenant à* $[0,n]$ *et* $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)\in \mathbb{C}_v^{n+1}$ .
*Soient* $\delta, N_0, c_1, c_2, \tau_1, \tau_2$ *des nombres positifs avec* $0\le \tau_1-\tau_2<\delta$ .
*Soit* $\sigma(t)$ *une fonction croissante pour* $t\ge N_0$ *telle que :*

$$\lim_{t\to+\infty}\sigma(t)=+\infty \quad et \quad \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\sigma(t+1)}{\sigma(t)}=1 \quad .$$

*On suppose que pour tout entier naturel* $N>N_0$ *, il existe une forme linéaire* $L_N$ *de* $\mathbb{Z}[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ *telle que :*

*( i )* $\|L_N\|\le e^{\sigma(N)}$ ,

*( ii )* $c_1e^{-\tau_1\sigma(N)}\le \dfrac{|L_N(\underline{\theta})|}{\|\underline{\theta}\|}\le c_2e^{-\tau_2\sigma(N)}$ ,

*Soit* $\mathfrak{L}\subset \mathbb{Q}[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ *un idéal homogène de dimension* $k$ *de degré* $1$ *alors si* $k$ *est tel que* $0<k+1<\dfrac{\tau_1+1}{1+\delta}$ *, il existe un réel* $\mathrm{K}$ *tel que*

$$Dist(\underline{\theta},Z(\mathfrak{L}))>\mathrm{K}.(V(\mathfrak{L}))^{-\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\delta)}} \quad .$$

*De plus si* $\mathfrak{L}$ *est de hauteur suffisamment grande on a :*

$$\mathrm{K}\ge c_1.\left(\left(\frac{1}{(n+1)^{(k+1)}c_2}\right)^{k+1}\left(\frac{c_1}{2}\right)^{k}\right)^{\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\delta)}}.\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\right) \quad .$$

*Démonstration*

D'une part, comme $0<k+1<\dfrac{\tau_1+1}{1+\delta}<\dfrac{\tau_1+1}{1+\tau_1-\tau_2}$ , il existe $\varepsilon>0$ tel que :

$$k+1<\frac{(\tau_1+1)(1+\varepsilon)}{(\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2+\varepsilon}<\frac{\tau_1+1}{1+\tau_1-\tau_2}$$

ce qui entraîne

$$0<\tau_2-\varepsilon(k+1)-k\left((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2\right) \quad .$$

D'autre part les propriétés de $\sigma(N)$, nous permettent de dire qu'il existe un entier $N_2$ , avec $N_2>N_0$ tel que

pour tout $N\ge N_2$ , on ait $\sigma(N)<(1+\varepsilon)\sigma(N-1)$ .

Soit $N_3 > N_2$ , tel que

$$\tau_2\sigma(N_2) \leq \varepsilon.\sigma(N_3) + \log 2 + \log(c_2) \qquad \text{et} \qquad \tau_2\sigma(N_2) < \tau_2\sigma(N_3) \ .$$

On suppose que la hauteur de $\mathfrak{L}$ est suffisamment grande, plus précisément que :

$$\left(\tau_2 - \varepsilon(k+1) - k\left((\tau_1+1)(1+\varepsilon) - \tau_2\right)\right)\sigma(N_3) < \mathrm{h}(\mathfrak{L}) + (k+1)^2 \log(n+1) + k.\left(\log 2 + \log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\right) + \log(c_2) \, .$$

( On peut aussi supposer que la hauteur de $\mathfrak{L}$ est quelconque mais choisir $c_2$ suffisamment grand afin que l'inégalité soit réalisée.)

Comme $\sigma(N)$ est croissante et de limite infinie et que $\tau_2 - \varepsilon(k+1) - k\left((\tau_1+1)(1+\varepsilon) - \tau_2\right) > 0$, il existe $N_{Max}$ tel que $N_{Max}$ soit le plus petit entier supérieur à $N_3$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \mathrm{h}(\mathfrak{L}) + (k+1)^2 \log(n+1) + k.\left(\log 2 + \log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\right) + \log(c_2) &\leq \left(\tau_2 - \varepsilon.(k+1) - k\left((\tau_1+1)(1+\varepsilon) - \tau_2\right)\right)\sigma(N_{Max}) \\ &\leq \left(\tau_2 - \varepsilon.(k+1)\right)\sigma(N_{Max}) - k\left((\tau_1+1)(1+\varepsilon) - \tau_2\right)\sigma(N_{Max}-1) \, . \end{aligned}$$

Posons

$$\mu = \left((\tau_1+1)(1+\varepsilon) - \tau_2\right)\sigma(N_{Max}-1) + \log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

$$\tau = \sigma(N_{Max})$$

$$U = \tau_2\sigma(N_{Max}) - \log(c_2)$$

$$S_i = \tau_2\sigma(N_2+i) - \log(c_2) \qquad \text{et} \qquad N_2 + l = N_{Max}$$

$$L_{i,1} = L_{N_2+i} \ .$$

Vérifions que l'on a alors les conditions du ***corollaire 5.5*** , pour $0 \leq i \leq l$ .

- La définition de $S_i$ entraîne :
  $S_0 = \tau_2\sigma(N_2) - \log(c_2)$ et $S_l = \tau_2\sigma(N_{Max}) - \log(c_2)$,

on obtient donc immédiatement d'après la définition de $N_3$ et de $N_{Max}$

$$S_0 \leq \varepsilon.\tau + \log 2 \qquad \text{et} \qquad S_0 < S_l = U \ .$$

- Comme $\|L_N\| \leq e^{\sigma(N)}$ et que $\overline{\mathrm{h}}(L_N) \leq \log(\|L_N\|)$ , on obtient :

$$\overline{\mathrm{h}}(L_{i,1}) \leq \log(\|L_{N_2+i}\|) \leq \sigma(N_{Max}) = \tau = L_{N_2+i} \ .$$

- Comme $c_1 e^{-\tau_1\sigma(N)} \le c_2 e^{-\tau_2\sigma(N)}$ , cela entraîne $\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right) \ge (\tau_2-\tau_1)\sigma(N_{Max})$ .

Donc

$$\mu \ge \left((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2\right)\sigma(N_{Max}-1)+(\tau_2-\tau_1)\sigma(N_{Max}) ,$$

mais

$$\sigma(N_{Max}) \le (1+\varepsilon)\sigma(N_{Max}-1)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}\mu &\ge \left((\tau_1+1)-\frac{\tau_2}{1+\varepsilon}\right)\sigma(N_{Max})+(\tau_2-\tau_1)\sigma(N_{Max}) \\ &\ge \left(1+\tau_2\left(1-\frac{1}{1+\varepsilon}\right)\right)\sigma(N_{Max}) \\ &\ge \sigma(N_{Max}) \\ &\ge \tau\end{aligned}$$

- Comme $\frac{|L_N(\underline{\theta})|}{\|\underline{\theta}\|} \le c_2 e^{-\tau_2\sigma(N)}$ , on a

$$\frac{|L_{i,1}(\underline{\theta})|}{\|\underline{\theta}\|} = \frac{|L_{N_2+i}(\underline{\theta})|}{\|\underline{\theta}\|} \le e^{-\tau_2\sigma(N_2+i)+\log(c_2)} \le e^{-S_i} .$$

- Les conditions *( i )* et *( ii )* entraînent $c_1 e^{-(1+\tau_1)\sigma(N)} \le \frac{|L_N(\underline{\theta})|}{\|L_N\|\|\underline{\theta}\|}$ ,

or

$$\mu = \left((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2\right)\sigma(N_{Max}-1)+\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right) ,$$

et par conséquent

$$\mu \ge \left((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2\right)\sigma(N_2+i-1)+\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right) .$$

Mais

$$\sigma(N_2+i) < (1+\varepsilon)\sigma(N_2+i-1)$$

qui donne

$$\begin{aligned}\mu &> (\tau_1+1)\sigma(N_2+i)-\tau_2\sigma(N_2+i-1)+\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\\ &> (\tau_1+1)\sigma(N_2+i)-\log(c_1)+S_{i-1}\end{aligned}$$

qui permet de conclure que

$$c_1e^{-(\tau_1+1)\sigma(N_2+i)} > e^{-(S_{i-1}+\mu)}$$

et par conséquent la forme linéaire $L_{i,1}$ n'a pas de zéros dans la boule $B\left(\underline{\theta},e^{-(S_{i-1}+\mu)}\right)$ .

- Enfin l'inégalité

$$\begin{aligned}\mathrm{h}(\mathfrak{P})+(k+1)^2\log(n+1)+k.\left(\log 2+\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\right)+\log(c_2) &\le (\tau_2-\varepsilon.(k+1))\sigma(N_{Max})\\ &\quad -k((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2)\sigma(N_{Max}-1)\end{aligned}$$

entraîne

$$\mathrm{h}(\mathfrak{P})+(k+1)^2\log(n+1)+k.(\log 2+\mu)\le(\tau_2-\varepsilon.(k+1))\sigma(N_{Max})-\log(c_2)$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{h}(\mathfrak{P})+(k+1)^2\log(n+1)+k.(\log 2+\mu)\le U-(k+1).\varepsilon.\tau\ .$$

On peut alors appliquer le ***corollaire 5.5*** , avec $n_i=1$ , ce qui donne

$$\log\left(Dist\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P})\right)\right)\ge-(U+\mu)$$

soit

$$\log\left(Dist\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P})\right)\right)\ge-((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2)\sigma(N_{Max}-1)-\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)-\tau_2\sigma(N_{Max})+\log(c_2)$$

et par conséquent

$$\log\left(Dist\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P})\right)\right)\ge-\left((1+\tau_1+\varepsilon(1+\tau_1+\tau_2))\sigma(N_{Max}-1)-\log(c_1)\right)\ .$$

Comme

$$\mathrm{h}(\mathfrak{P})+(k+1)^2\log(n+1)+k.\left(\log 2+\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\right)+\log(c_2)>(\tau_2-\varepsilon(k+1)-k((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2))\sigma(N_{Max}-1)\ ,$$

on a

$$\frac{1}{\left(\tau_2-\varepsilon(k+1)-k\left((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2\right)\right)}\left(\mathrm{h}(\mathfrak{L})+\mathrm{K}_1\right)>\sigma\left(N_{Max}-1\right)$$

avec

$$\mathrm{K}_1=(k+1)^2\log(n+1)+k.\left(\log 2+\log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\right)+\log(c_2)$$

ce qui entraîne

$$\mathrm{K}_1\leq\log\left(\left((n+1)^{(k+1)}c_2\right)^{k+1}.\left(\frac{2}{c_1}\right)^k\right).$$

Donc on obtient

$$\log\left(Dist\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{L})\right)\right)>-\left(\frac{1+\tau_1+\varepsilon(1+\tau_1+\tau_2)}{\left(\tau_2-\varepsilon(k+1)-k\left((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2\right)\right)}\left(\mathrm{h}(\mathfrak{L})+\mathrm{K}_1\right)-\log(c_1)\right).$$

D'autre part

$$\frac{1+\tau_1+\varepsilon(1+\tau_1+\tau_2)}{\tau_2-\varepsilon(k+1)-k\left((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2\right)}=\frac{1+\tau_1+\varepsilon(1+\tau_1+\tau_2)}{\tau_1+1-(k+1)(1+\tau_1-\tau_2)-\varepsilon\left(k+1+k(1+\tau_1)\right)}>\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\tau_1-\tau_2)}$$

or

$$\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\delta)}>\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\tau_1-\tau_2)},$$

ce qui implique que l'on peut choisir $\varepsilon$ tel que

$$\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\delta)}\geq\frac{1+\tau_1+\varepsilon(1+\tau_1+\tau_2)}{\tau_2-\varepsilon(k+1)-k\left((\tau_1+1)(1+\varepsilon)-\tau_2\right)}$$

et qui entraîne

$$\log\left(Dist\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{L})\right)\right)\geq-\left(\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\delta)}\mathrm{h}(\mathfrak{L})+\mathrm{K}_2\right)$$

avec

$$\mathrm{K}_2 \leq \left( \frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\delta)} \mathrm{K}_1 - \log(c_1) \right)$$

Enfin, comme on a

$$\overline{\mathrm{H}}(\mathfrak{L}) = V(\mathfrak{L}).\exp\left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} \right)$$

cela entraîne grâce au fait que $\mathrm{H}(\mathfrak{L}) \leq \overline{\mathrm{H}}(\mathfrak{L})$ ,

$$Dist(\underline{\theta}, Z(\mathfrak{L})) > \mathrm{K}.(V(\mathfrak{L}))^{-\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\delta)}}$$

avec

$$\mathrm{K} \geq c_1.\left( \left( \frac{1}{(n+1)^{(k+1)} c_2} \right)^{k+1} \left( \frac{c_1}{Max(2, \|\underline{\theta}\|)} \right)^{k} \right)^{\frac{1+\tau_1}{\tau_1+1-(k+1)(1+\delta)}} .\exp\left( \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} \right) . \quad \square$$

***Remarque :***

En particulier, si $\tau_2 > \frac{n-1}{n}(1+\tau_1)$ alors $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ sont linéairement indépendants sur Q.

En effet, dans ce cas $n < \frac{1+\tau_1}{1+\tau_1-\tau_2}$ et si l'on appelle $r$ le nombre maximum de nombres linéairement indépendants sur Q parmi $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_n$ , il existe $n+1-r$ formes linéaires $L_j(\underline{\mathrm{X}})$ à coefficients rationnels telles que $L_j(\underline{\theta}) = 0$ pour $j = 1, \ldots, n+1-r$ .

Si $\mathfrak{L}$ est la variété linéaire projective de dimension $r-1$ définie par les équations $L_j(\underline{\mathrm{X}}) = 0$ , alors $\underline{\theta} \in \mathfrak{L}$ et d'après le ***corollaire 5.6*** on obtient $r \geq \frac{1+\tau_1}{1+\delta}$ pour tout $\delta > \tau_1 - \tau_2$ , ce qui entraîne $r \geq \frac{1+\tau_1}{1+\tau_1-\tau_2}$ et par conséquent $r = n+1$ .

## 3 - Indépendance linéaire et algébrique

Le ***corollaire 5.7***, corollaire du ***théorème 5.2***, sera traité sur un corps de nombres $K$.

**Corollaire 5.7**
*Soient* $K$ *un corps de nombres,* $v$ *une place quelconque de ce corps,* $k$ *un entier appartenant à* $[0,n]$ *et* $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)\in \mathrm{C}_v^{\,n+1}$.
*Soient* $\tau,\mu$ *et* $U$ *des réels avec* $\tau,\mu\geq 0$ *et* $\tau+\log 2<U$.
*On suppose qu'il existe:*
*- une suite strictement croissante de réels* $(S_i)_{0\leq i\leq l}$ *satisfaisant :*

*(o)* $0<S_0\leq \tau+\log 2$ *et* $S_{l-1}<U\leq S_l$.

*- pour* $1\leq i\leq l$, *une famille de formes linéaires* $\left(L_{i,1},\ldots,L_{i,n_i}\right)$ *de* $K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ *telle que :*

*( i )* $\overline{\mathrm{h}}\left(L_{i,j}\right)\leq \tau$ *pour* $j=1,\ldots,n_i$ ,

*( ii )* $\dfrac{\left|L_{i,j}\left(\underline{\theta}\right)\right|_v}{\left\|\underline{\theta}\right\|_v .M_v\left(L_{i,j}\right)}\leq e^{-S_i}$ *pour* $j=1,\ldots,n_i$ ,

*( iii ) les polynômes* $L_{i,j}$ *pour* $j=1,\ldots,n_i$ *sont sans zéros dans la boule* $B\left(\underline{\theta},e^{-(S_{i-1}+\mu)}\right)$ *de* $\mathrm{P}_n(\mathrm{C})$ *de centre* $\underline{\theta}$ *et de rayon* $e^{-(S_{i-1}+\mu)}$ *pour la distance* $Dist_v$ .

*Soit* $\mathfrak{I}\subset K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ *un idéal homogène de dimension* $k$ *de degré* $D$ *. Si la condition suivante est réalisée*

*( iv )* $\dfrac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\Big(\mathrm{h}(\mathfrak{I})+\big((k+1)\log(n+1)+\tau\big)(k+1)D\Big)+k.D.(\mu+\log 2)\leq U$ ,

*alors on a*

$$\log\Big(Dist_v\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)\Big)\geq -(U+\mu) .$$

*Démonstration*

Prenons $\delta=1$ et $\sigma=1$ . L'application du ***théorème 5.2***, nous donne immédiatement le résultat. □

**Corollaire 5.8 .**

*Soient $K$ un corps de nombres, $v$ une place quelconque de ce corps, $k$ un entier appartenant à $[0,n]$ et $\underline{\theta}=(\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n)\in \mathbb{C}_v^{\,n+1}$ .*

*Soient $\delta, N_0, c_1, c_2, \tau_1, \tau_2$ des nombres positifs avec $0\le \tau_1-\tau_2<\delta$ et $\tau_2>\dfrac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}$ .*

*Soit $\sigma(t)$ une fonction croissante pour $t\ge N_0$ telle que :*

$$\lim_{t\to+\infty}\sigma(t)=+\infty \quad et \quad \overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\sigma(t+1)}{\sigma(t)}=1 \quad .$$

*On suppose que pour tout entier naturel $N>N_0$ , il existe une forme linéaire $L_N$ de $K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ telle que :*

*( i )* $\overline{\mathrm{h}}(L_N)\le e^{\sigma(N)}$ ,

*( ii )* $c_1 e^{-\tau_1\sigma(N)}\le \dfrac{|L_N(\underline{\theta})|_v}{\|\underline{\theta}\|_v . M_v(L_N)}\le c_2 e^{-\tau_2\sigma(N)}$ ,

*Soit $\mathfrak{I}\subset K[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ un idéal homogène de dimension $k$ de degré $D$ alors si $k$ est tel que $0<(k+1)D<\dfrac{\tau_1}{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}+\delta}$ , il existe un réel $\mathrm{K}>0$ tel que*

$$Dist(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I}))>\mathrm{K}.(H(\mathfrak{I}))^{-\frac{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}.\tau_1}{\tau_2-\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}(k+1)D-k.D.\delta}} \ .$$

*Démonstration*

D'une part, comme $0<(k+1)D<\dfrac{\tau_1}{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}+\delta}<\dfrac{\tau_1}{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}+\tau_1-\tau_2}$ , il existe $\varepsilon>0$ tel que :

$$(k+1)D<\frac{\tau_1(1+\varepsilon)}{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}+\tau_1(1+\varepsilon)-\tau_2}<\frac{\tau_1}{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}+\tau_1-\tau_2}$$

ce qui entraîne

$$(k+1)D<\frac{\tau_2+D\big(\tau_1(1+\varepsilon)-\tau_2\big)}{\frac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}+\tau_1(1+\varepsilon)-\tau_2}$$

et

$$\tau_2-\tfrac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}(k+1)D-k.D\big(\tau_1(1+\varepsilon)-\tau_2\big)>0 \ .$$

D'autre part les propriétés de $\sigma(N)$, nous permettent de dire qu'il existe un entier $N_2$ , avec $N_2>N_0$ tel que

pour tout $N\ge N_2$ , on ait $\quad \sigma(N)<(1+\varepsilon)\sigma(N-1)$ .

Soit $N_3 > N_2$ , tel que

$$\tau_2\sigma(N_2) \le \sigma(N_3) + \log 2 + \log(c_2) \quad \text{et} \quad \tau_2\sigma(N_2) < \tau_2\sigma(N_3) \ .$$

On suppose que la hauteur de $\mathfrak{I}$ est suffisamment grande, plus précisément que :

$$\left(\tau_2 - \tfrac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}(k+1)D - k.D\left(\tau_1(1+\varepsilon)-\tau_2\right)\right)\sigma(N_3) < \tfrac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}(\mathfrak{I}) + (k+1)^2 .D.\log(n+1)\right) + k.D.\left(\log 2 + \log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\right) + \log(c_2) .$$

( On peut aussi supposer que la hauteur de $\mathfrak{I}$ est quelconque mais choisir $c_2$ suffisamment grand afin que l'inégalité soit réalisée.)

Comme $\sigma(N)$ est croissante et de limite infinie et que

$$\tau_2 - \tfrac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}(k+1)D - k.D\left(\tau_1(1+\varepsilon)-\tau_2\right) > 0 \ ,$$

il existe $N_{Max}$ tel que $N_{Max}$ soit le plus petit entier supérieur à $N_3$ vérifiant :

$$\tfrac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}(\mathfrak{I}) + (k+1)^2 D.\log(n+1)\right) + k.D.\left(\log 2 + \log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\right) + \log(c_2) \le \left(\tau_2 - \tfrac{[K:\mathbb{Q}]}{n_v}(k+1)D\right)\sigma(N_{Max}) - k.D\left(\tau_1(1+\varepsilon)-\tau_2\right)\sigma(N_{Max}-1) .$$

Posons

$$\mu = \left(\tau_1(1+\varepsilon)-\tau_2\right)\sigma(N_{Max}-1) + \log\left(\frac{c_2}{c_1}\right)$$

$$\tau = \sigma(N_{Max})$$

$$U = \tau_2\sigma(N_{Max}) - \log(c_2)$$

$$S_i = \tau_2\sigma(N_2+i) - \log(c_2) \qquad \text{et} \qquad N_2 + l = N_{Max}$$

$$L_{i,1} = L_{N_2+i} \ .$$

On montre comme dans le ***corollaire 5.5*** , que les conditions du ***corollaire 5.7*** sont vérifiées pour $0 \le i \le l$ , c'est-à-dire :

- $S_0 \le \tau + \log 2 \qquad \text{et} \qquad S_0 < S_l = U$ .
- $\overline{\mathrm{h}}(L_{i,1}) \le \sigma(N_{Max}) = \tau$ .
- $\dfrac{|L_{i,1}(\underline{\theta})|_v}{\|\underline{\theta}\|_v .M_v(L_{i,1})} = \dfrac{|L_{N_2+i}(\underline{\theta})|_v}{\|\underline{\theta}\|_v .M_v(L_{i,1})} \le e^{-\tau_2\sigma(N_2+i)+\log(c_2)} \le e^{-S_i}$ .

- La forme linéaire $L_{i,1}$ n'a pas de zéro dans la boule $B\left(\underline{\theta}, e^{-(S_{i-1}+\mu)}\right)$ .

- Enfin que

$$\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\Big(\mathrm{h}(\mathfrak{I})+\big((k+1)\log(n+1)+\tau\big)(k+1)D\Big)+k.D.(\log 2+\mu)\leq U \ .$$

On peut alors appliquer le ***corollaire 5.7***, avec $n_i = 1$ , ce qui donne

$$\log\Big(Dist\big(\underline{\theta}, Z(\mathfrak{I})\big)\Big) \geq -(U+\mu)$$

soit

$$\log\Big(Dist\big(\underline{\theta}, Z(\mathfrak{I})\big)\Big) \geq -\Big(\big(\tau_1+\varepsilon(\tau_1+\tau_2)\big)\sigma(N_{Max}-1)-\log(c_1)\Big) \ .$$

On montre alors que

$$\log\Big(Dist\big(\underline{\theta}, Z(\mathfrak{I})\big)\Big) > -\left(\frac{\tau_1+\varepsilon(\tau_1+\tau_2)}{\Big(\tau_2-\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}(k+1)D-k.D\big(\tau_1(1+\varepsilon)-\tau_2\big)\Big)}\right)\Big(\tfrac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}.\mathrm{h}(\mathfrak{I})+\mathrm{K}_1\Big)+\log(c_1) \, .$$

avec

$$\mathrm{K}_1 \leq \log\left(\left((n+1)^{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}(k+1)}c_2\right)^{(k+1)D}.\left(\frac{2}{c_1}\right)^{k.D}\right)$$

et qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\frac{\tau_1}{\tau_2-\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}(k+1)D-k.D.\delta} > \frac{\tau_1+\varepsilon(\tau_1+\tau_2)}{\tau_2-\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}(k+1)D-k.D\big(\tau_1(1+\varepsilon)-\tau_2\big)} \ ,$$

ce qui entraîne

$$\log\Big(Dist\big(\underline{\theta}, Z(\mathfrak{I})\big)\Big) \geq -\left(\frac{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}.\tau_1}{\tau_2-\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}(k+1)D-k.D.\delta}\mathrm{h}(\mathfrak{I})+\mathrm{K}_2\right)$$

avec

$$\mathrm{K}_2 \leq \left(\frac{\tau_1}{\tau_2-\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}(k+1)D-k.D.\delta}\mathrm{K}_1-\log(c_1)\right). \ \square$$

***Remarque***

Plaçons nous dans le cas où $K=\mathrm{Q}$ et $v$ la place archimédienne , si l'on considère que les hypothèses du ***corollaire 5.8*** sont satisfaites au niveau des formes linéaires de $\mathrm{Z}[X_0,X_1,\ldots,X_n]$.

Dans le cas particulier où $\tau_2>\frac{n-1}{n}\tau_1+1$ alors $\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n$ sont linéairement indépendants sur Q .

En effet, dans ce cas , on a $n<\frac{\tau_1}{1+\tau_1-\tau_2}$ et si l'on appelle $r$ le nombre maximum de nombres linéairement indépendants sur Q parmi $\theta_0,\theta_1,\ldots,\theta_n$ , il existe $n+1-r$ formes linéaires $L_j(\underline{\mathrm{X}})$ à coefficients rationnels telles que $L_j(\underline{\theta})=0$ pour $j=1,\ldots,n+1-r$ .

Si $\mathfrak{L}$ est la variété linéaire projective de dimension $r-1$ définie par les équations $L_j(\underline{\mathrm{X}})=0$ , alors $\underline{\theta}\in\mathfrak{L}$ et d'après le ***corollaire 5.8*** on obtient $r\geq\frac{\tau_1}{1+\tau_1-\tau_2}$ , ce qui entraîne $r=n+1$ .

Soit $\mathfrak{I}\subset\mathrm{Q}[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ un idéal homogène, de dimension $k$ et de degré $D$ vérifiant $(k+1)D\leq n$ ,

comme $n<\frac{\tau_1}{1+\tau_1-\tau_2}$ , il existe $\delta>\tau_1-\tau_2$ tel que $(k+1)D<\frac{\tau_1}{1+\delta}$

et d'après le ***corollaire 5.8*** ,on obtient

$$Dist(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I}))>\mathrm{K}.(H(\mathfrak{I}))^{-\frac{\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}.\tau_1}{\tau_2-\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}(k+1)D-k.D.\delta}}\qquad \text{avec}\quad \mathrm{K}>0$$

ce qui entraîne la non appartenance de $\underline{\theta}$ à $Z(\mathfrak{I})$ . Ce résultat n'a rien d'étonnant, car d'après un résultat de *M. Chardin* dans [ C1 ] chapitre I, les variétés $Z(\mathfrak{I})$ vérifiant $(k+1)D\leq n$ sont contenues dans un hyperplan . ☐

## 4 - Autre corollaire

Voici une autre forme de corollaire du premier critère qui m'a été fournie par *P. Philippon*. On se placera dans le corps $\mathbb{Q}$.

**Corollaire 5.9** *Soit* $k$ *un entier appartenant à* $[0,n]$ *et* $\underline{\theta}=(\theta_1,\ldots,\theta_n)\in \mathbb{C}_v^{\,n}$ .
*Soient* $\delta,\sigma,\tau$ *et* $U$ *des réels tels que* $\sigma,\delta\geq 1$ *et* $U>\tau\geq 3.(k+1).\delta.\log(n+1)$ .
*On suppose que pour tout réel* $S$ *vérifiant* $\tau<S\leq U$ *, il existe un polynôme* $Q_S$ *de* $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ *tel que :*

- $d^\circ Q_S\leq \delta$ ,
- $\|Q_S^*\|\leq e^\tau$ ,
- $e^{-\sigma S+2\tau}\leq \dfrac{|Q_S(\underline{\theta})|}{\left(1+\|\underline{\theta}\|^2\right)^{\frac{d^\circ Q_S}{2}}}\leq e^{-S}$ .

*Alors pour tout idéal* $\mathfrak{I}\in \mathbb{Q}[X_1,\ldots,X_n]$ *de dimension* $k$ *, de degré* $D$ *et de hauteur* $H$ *satisfaisant*

$$2.\delta^k\left(\delta.H+\tau.(k+1)D\right)\leq \frac{U}{\sigma^{k+1}}$$

*on a*

$$\log\left(Dist_v\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{I})\right)\right)\geq -U .$$

Démonstration

Posons $\theta_0=1$ , $\theta_k=Max(\theta_1,\theta_1,\ldots,\theta_n)$ et $\underline{\theta}'=\left(\dfrac{\theta_0}{\theta_k},\dfrac{\theta_1}{\theta_k},\ldots 1,\ldots,\dfrac{\theta_n}{\theta_k}\right)$ .

Considérons les polynômes ${}^hQ_S$ de $\mathbb{Z}[X_0,X_1,\ldots,X_n]$ , polynômes homogénéisés de $Q_S$ , de degré $\delta$, définis par :

$${}^hQ_S=X_0^{d^\circ Q_S}.X_k^{\delta-d^\circ Q_S}.Q_S\left(\frac{X_1}{X_0},\ldots,\frac{X_n}{X_0}\right) .$$

Nous allons établir dans ces conditions un résultat préliminaire, qui est le suivant :

*Considérons un polynôme homogène* $Q \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ *, tel que* $Q(\underline{\mathrm{X}}) = \sum_{|\underline{\alpha}|=\delta} a_{\underline{\alpha}}.\underline{\mathrm{X}}^{\underline{\alpha}}$ .

*Si ce polynôme a au moins un zéro dans la boule de centre* $\underline{\theta}' = \left(\frac{\theta_0}{\theta_k}, \frac{\theta_1}{\theta_k}, \ldots 1, \ldots, \frac{\theta_n}{\theta_k}\right)$ *et de rayon*

$R < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ *pour la distance euclidienne de la carte affine* $X_k \neq 0$ *alors*

$$\frac{|Q(\underline{\theta}')|_v^2}{\|\underline{\theta}'\|_v^{2.\delta}} \leq R.2^{\delta-1}.\sqrt{n+1}.\delta.\sqrt{\sum_{|\underline{\alpha}|=\delta} \frac{|a_{\underline{\alpha}}|_v^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}}} \quad .$$

Supposons que le polynôme $Q$ est un zéro $\underline{\eta} = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ dans la boule de centre $\underline{\theta}'$ et de rayon $R$ . La condition $R < \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ entraîne que $\eta_k \neq 0$ .

Prenons comme représentant de $\underline{\eta}$ l'élément $\underline{\eta} = \left(\frac{\eta_0}{\eta_k}, \frac{\eta_1}{\eta_k}, \ldots 1, \ldots, \frac{\eta_n}{\eta_k}\right)$ et posons :

$$\underline{\hat{\theta}} = \left(\frac{\theta_0}{\theta_k}, \ldots, \frac{\theta_n}{\theta_k}\right) \qquad \text{et} \qquad \underline{\hat{\eta}} = \left(\frac{\eta_0}{\eta_k}, \ldots, \frac{\eta_n}{\eta_k}\right) .$$

D'après le théorème des accroissements finis il existe un élément $\underline{\zeta} = (\zeta_0, \zeta_1, \ldots 1, \ldots, \zeta_n)$ de la boule tel que

$$Q(\underline{\theta}') - Q(\underline{\eta}) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \left(\frac{\theta_i}{\theta_k} - \frac{\eta_i}{\eta_k}\right) \frac{\partial Q}{\partial X_i}(\underline{\zeta}) .$$

Ce qui entraîne grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|Q(\underline{\theta}')|_v^2 \leq \|\underline{\hat{\theta}} - \underline{\hat{\eta}}\|_v^2 . \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \left|\frac{\partial Q}{\partial X_i}(\underline{\zeta})\right|_v^2 .$$

Mais on montre facilement que

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial X_i}(\underline{\zeta})\right|_v^2 \leq \delta^2 . \sum_{|\underline{\alpha}|=\delta} \frac{|a_{\underline{\alpha}}|_v^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}} . \|\underline{\zeta}\|_v^{2(d-1)}$$

et par conséquent

$$\frac{\left|Q(\underline{\theta'})\right|_v^2}{\left\|\underline{\theta'}\right\|_v^{2.\delta}} \le \left(\frac{\left\|\underline{\hat{\theta}}-\underline{\hat{\eta}}\right\|_v}{\left\|\underline{\theta'}\right\|_v}\right)^2 . \left(\frac{\left\|\underline{\zeta}\right\|_v}{\left\|\underline{\theta'}\right\|_v}\right)^{2(\delta-1)} .\delta^2.(n+1).\sum_{|\underline{\alpha}|=\delta}\frac{\left|a_{\underline{\alpha}}\right|_v^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}} .$$

Ce qui donne

$$\frac{\left|Q(\underline{\theta'})\right|_v^2}{\left\|\underline{\theta'}\right\|_v^{2.\delta}} \le R^2.\frac{1}{\left\|\underline{\theta'}\right\|_v^2}\left(\frac{\left\|\underline{\zeta}\right\|_v}{\left\|\underline{\theta'}\right\|_v}\right)^{2(\delta-1)} .\delta^2.(n+1).\sum_{|\underline{\alpha}|=\delta}\frac{\left|a_{\underline{\alpha}}\right|_v^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}}$$

$$\le R^2.2^{2(\delta-1)}.(n+1).\delta^2.\sum_{|\underline{\alpha}|=\delta}\frac{\left|a_{\underline{\alpha}}\right|_v^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}}$$

et termine la démonstration du résultat préliminaire.

Revenons à la démonstration du corollaire.

La condition $\tau \ge 3.\delta(k+1)\log(n+1)$ entraîne $\tau > (\delta-1)\log 2 + \frac{1}{2}\log(n+1) + \log\delta$

et comme on a aussi $\sqrt{\sum_{|\underline{\alpha}|=\delta}\frac{\left|a_{\underline{\alpha}}\right|_v^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}}} \le e^\tau$ , de la condition $e^{-\sigma S+2\tau} \le \frac{\left|Q_S(\underline{\theta})\right|}{\left(1+\left\|\underline{\theta}\right\|^2\right)^{\frac{d^\circ Q_S}{2}}}$ on déduit

$$e^{-\sigma S}.2^{\delta-1}.\sqrt{n+1}.\delta.\sqrt{\sum_{|\underline{\alpha}|=\delta}\frac{\left|a_{\underline{\alpha}}\right|_v^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}}} < \frac{\left|{}^hQ_S(\underline{\theta'})\right|}{\left\|\underline{\theta'}\right\|_v^\delta} ,$$

qui nous permet d'affirmer d'après la remarque préliminaire, que le polynôme ${}^hQ_S$ n'a pas de zéro dans la boule de centre $(1,\theta_0,\ldots,\theta_n)$ et de rayon $e^{-\sigma S}$ .

La condition $\sqrt{\sum_{|\underline{\alpha}|=\delta}\frac{\left|a_{\underline{\alpha}}\right|_v^2}{\binom{\delta}{\underline{\alpha}}}} \le e^\tau$ entraîne $\overline{\mathrm{h}}\left({}^hQ_S^*\right) \le \tau$ .

Considérons la suite

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log(n+1) < S_0 \le \tau + \log 2 \\ S_i = S_{i-1} + \mu \\ S_l = U \end{cases}$$

où $\mu > 0$ , vérifie $\mu + \log 2 + \frac{\log\delta}{2.\delta^k} \le 2(k+1).\delta.\log(n+1)$ .

Alors pour tout $1 \leq i \leq l$, les polynômes ${}^{h}Q_{S_i}$ vérifient :

- $d^\circ\left({}^{h}Q_{S_i}\right) = \delta$ ,
- $\overline{\mathrm{h}}\left({}^{h}Q_S^*\right) \leq \tau$ ,
- $\dfrac{\left|{}^{h}Q_{S_i}\left(\underline{\theta}'\right)\right|}{\left\|\underline{\theta}'\right\|_v^{\delta}} \leq e^{-S_i}$ ,
- le polynôme ${}^{h}Q_{S_i}$ n'a pas de zéro dans la boules de centre $\left(1, \theta_0, \ldots, \theta_n\right)$ et de rayon $e^{-\sigma(S_{i-1}+\mu)}$ .

Comme de plus, pour $\underline{\mathrm{d}} = \left(\delta, \ldots, \delta\right) \in \mathrm{N}^{k+1}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{t}_{\tau',\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right) + \left(\mu + \log 2 + \frac{\log \delta}{2.\delta^k}\right) Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right) &\leq \delta^k.\left(\delta.H + \left(\tau + \left(k+1\right)\delta.\log\left(n+1\right) + 2\delta.\log\left(n+1\right)\right)\left(k+1\right).D\right) \\
&\leq \delta^k.\left(\delta.H + \left(\tau + 3\left(k+1\right)\delta.\log\left(n+1\right)\right)\left(k+1\right).D\right) \\
&\leq 2.\delta^k.\left(\delta.H + \tau\left(k+1\right).D\right)
\end{aligned}$$

la propriété

$$2.\delta^k\left(\delta.H + \tau.\left(k+1\right)D\right) \leq \frac{U}{\sigma^{k+1}}$$

entraîne

$$\mathrm{t}_{\tau',\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right) + \left(\mu + \log 2 + \frac{\log \delta}{2.\delta^k}\right) Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{I}\right) \leq \frac{U}{\sigma^{k+1}} \quad .$$

On peut alors appliquer le cas B du ***théorème 5.1***, dans lequel $\kappa = 0$ , et l'on obtient :

$$\log\left(Dist_v\left(\underline{\theta}, Z\left(\mathfrak{I}\right)\right)\right) \geq -U \quad . \square$$

***Nota bene***

On obtient le même résultat, si l'on remplace la condition

$$e^{-\sigma S + 2\tau} \leq \frac{\left|Q_S\left(\underline{\theta}\right)\right|}{\left(1 + \left\|\underline{\theta}\right\|^2\right)^{\frac{d^\circ Q_S}{2}}} \leq e^{-S}$$

par $e^{-\sigma S + \tau} \leq \dfrac{\left|Q_S\left(\underline{\theta}\right)\right|}{\left(1 + \left\|\underline{\theta}\right\|^2\right)^{\frac{d^\circ Q_S}{2}} .M_v\left(Q_S^*\right)} \leq e^{-S}$ et que l'on applique le cas B du ***théorème 5.2*** . $\square$

## 5 - Calculs annexes

### a) Démonstration de (*1*) :

$$\log\left(\frac{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}{r}.2^{\frac{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}{r}-1}+e^{\frac{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}{2}\log\delta}\right)+C_r.\frac{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\leq\delta\log(n+1)Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)\leq(k+1).\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}{r}$$

*****************

On se place dans le cas où $k+1\geq r\geq 2$ , cela entraîne que $n\geq 1$ .

On a

$$\frac{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}{r}=\delta^{r-1}D \quad \text{où} \quad D=\deg(\mathfrak{P}_r)$$

et

$$\begin{cases} C_r\leq\frac{1}{2}(r-1)\log(\gamma_{N'}) \quad \text{si } r<n+1 \\ C_r=0 \quad \text{si } r=n+1 \end{cases}$$

avec $\log(\gamma_{N'})\leq\log(N'+1)+\gamma\leq\log\left(\frac{(n+1)^{2\delta}}{\delta}\right)$ .

Posons

$$A=\begin{cases} \log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)+(r-1)\left(\delta\log(n+1)-\frac{1}{2}\log\delta\right).\delta^{r-1}D \quad \text{si} \quad r<n+1 \\ \log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right) \quad \text{si} \quad r=n+1 \end{cases}$$

Déterminons $\alpha$ tel que : $A\leq\alpha.\delta^r\log(n+1)D$ .

Cela revient à chercher $\alpha$ tel que :

- si $r<n+1$

$$\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)-\frac{1}{2}(r-1)(\log\delta).\delta^{r-1}D\leq(\alpha-r+1).\delta^r\log(n+1)D \ .$$

- si $r=n+1$

$$\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)\leq\alpha.\delta^r\log(n+1)D \ .$$

- Si $D=1$ et $\delta=1$ ,

$$\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)-\frac{1}{2}(r-1)(\log\delta).\delta^{r-1}D=\log 2$$

$$\leq \log(n+1).D.\delta^{r}$$

ce qui entraîne $\alpha=r$ .

- Si $D\geq 2$ et $\delta=1$ ,

  - si $n=1$ alors $r=n+1$ et $C_r=0$,

$$\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)=\log\left(D.2^{D-1}+1\right)$$

mais l'étude de la fonction $h$ définie par $h(x)=\dfrac{\log\left(x.2^{x-1}+1\right)}{x}$ montre que celle-ci admet un maximum voisin de $0,879$ , ce qui entraîne

$$\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)\leq 0,879.D$$

$$\leq r.\log(n+1)D$$

ce qui entraîne encore $\alpha=r$ .

  - si $n\geq 2$ ,

$$\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)-\frac{1}{2}(r-1)(\log\delta).\delta^{r-1}D\leq\log\left(D.2^{D-1}+1\right)$$

d'après l'étude de la fonction $h$ on obtient

$$\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)-\frac{1}{2}(r-1)(\log\delta).\delta^{r-1}D\leq 0,879.D$$

$$\leq \log(n+1).D$$

par conséquent, nous avons encore une fois $\alpha=r$ .

- Si $D \geq 2$ et $\delta \geq 2$ , posons $X = D.\delta^{r-1}$ , alors

$$\frac{\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)}{\delta^r D}-\frac{1}{2\delta}(r-1)\log\delta=\frac{\log\left(X.2^{X-1}+e^{r\frac{X}{2}\log\delta}\right)}{\delta X}-\frac{1}{2\delta}(r-1)\log\delta$$

$$\leq\frac{r\log\delta}{2\delta}+\frac{\log\left(X.2^{X-1}+1\right)}{\delta X}-\frac{r-1}{2\delta}\log\delta$$

$$\leq\frac{\log\delta}{2\delta}+\frac{\log\left(X.2^{X-1}+1\right)}{\delta X}$$

ce qui d'après l'étude de la fonction $h$ donne

$$\frac{\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)}{\delta^r D}-\frac{1}{2\delta}(r-1)\log\delta\leq\frac{\log\delta}{2\delta}+\frac{0,879}{\delta}$$

$$\leq 0,624$$

$$\leq\log(n+1)$$

c'est-à-dire

$$\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)-\frac{1}{2}(r-1)(\log\delta-\log 0,9)\delta^{r-1}D\leq\log(n+1)\delta^r.D$$

ce qui donne encore $\alpha = r$ .

Dans tous les cas, on a donc

$$\log\left(\delta^{r-1}D.2^{\delta^{r-1}D-1}+e^{r\frac{\delta^{r-1}D}{2}\log\delta}\right)+C_r.\delta^{r-1}D\leq r.\log(n+1)D.\delta^r\ .\ \square$$

**b ) Démonstration de (*2*) :**

$$-\sigma^k \mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I}) + \mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I}) - \mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) + \overline{\mathrm{h}}(Q^*_{i_0,j})\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1} - 1\right) \leq -\sigma^k \mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) - (k+1)\delta \log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1} - \tau$$

****************

Posons

$$A = -\sigma^k \mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I}) + \mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I}) - \mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) + \overline{\mathrm{h}}(Q^*_{i_0,j})\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1} - 1\right)$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
A &\leq -(\sigma^k - 1)\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I}) - (\tau + (k+1)\delta \log(n+1)).Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I}) - \mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) + \tau\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1} - 1\right) \\
&\leq -(\sigma^k - 1)\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) - (\tau + (k+1)\delta \log(n+1)).Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I}) - \mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) + \tau\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1} - 1\right) \\
&\leq -\sigma^k \mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) + \mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) - \mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) - (\tau + (k+1)\delta \log(n+1)).Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I}) + \tau\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1} - 1\right) \\
&\leq -\sigma^k \mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) + (\tau + (k+1)\delta \log(n+1))\, Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) - (\tau + (k+1)\delta \log(n+1)).Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I}) + \tau\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1} - \tau \\
&\leq -\sigma^k \mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) + (\tau + (k+1)\delta \log(n+1))\, Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})\left(\frac{k}{k+1} - 1\right) + \tau\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1} - \tau \\
&\leq -\sigma^k \mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) - \frac{1}{k+1}(\tau + (k+1)\delta \log(n+1))\, Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I}) + \tau\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1} - \tau \\
&\leq -\sigma^k \mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{I}, Q_{i_0,j}) - (k+1)\delta \log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1} - \tau
\end{aligned}$$

****************

On démontre de façon identique

$$-\sigma^{r-1} \mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r) + \mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r) - \mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r, Q_{i_0,j}) + \overline{\mathrm{h}}(Q^*_{i_0,j})\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r} - 1\right) \leq -\sigma^{r-1} \mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r, Q_{i_0,j}) - (k+1)\delta \log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r} - \tau$$

d'où l'on déduit

$$-\sigma^{r-1} \mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r) + \mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r) - \mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r, Q_{i_0,j}) + \overline{\mathrm{h}}(Q^*_{i_0,j})\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r} \leq -\sigma^{r-1} \mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}(\mathfrak{P}_r, Q_{i_0,j}) - (k+1)\delta \log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r} - \tau + \overline{\mathrm{h}}(Q^*_{i_0,j})$$

****************

**c) Démonstration de (*3*) :**

$$\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)\right)\right) < -\sigma^k\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)+\left(\mu+\log 2\right)Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)\right)+k.Min\left(\mu,\tau-\kappa\right).$$

*****************

On a

$$\log\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)\right)\right) < (k+1).\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-U+Max(\kappa,\tau-\mu)+\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}-1\right)\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^*\right)$$
$$+\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^*\right)\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-1\right)\right).$$

Comme d'autre part

$$-U \leq -\sigma^k\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+k(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}\right)+(k+1)Min(\mu,\tau-\kappa)$$

et $(k+1).Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)=k.Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})$ ,

et que d'après (*2*)

$$-\sigma^k\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^*\right)\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-1\right)\leq -\sigma^k\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)-(k+1)\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-\tau .$$

On obtient alors

$$\log\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)\right)\right) < (k+1).\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-\sigma^k\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+k(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}\right)+k.Min(\mu,\tau-\kappa)+\tau$$
$$+\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}-1\right)\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^*\right)+\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^*\right)\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-1\right)\right)$$
$$< (k+1).\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-\sigma^k.k(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}+k.Min(\mu,\tau-\kappa)+\tau$$
$$+\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(-\sigma^k\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})+\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^*\right)\left(\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-1\right)\right)+\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}-1\right)\overline{\mathrm{h}}\left(Q_{l,j}^*\right)$$
$$< (k+1).\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-\sigma^k.k(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}+k.Min(\mu,\tau-\kappa)$$
$$+\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(-\sigma^k\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}Q_{l,j}-(k+1)\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}-\tau .\right)+\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\tau$$
$$< -\sigma^k\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)+k(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{I})}{k+1}\right)+k.Min(\mu,\tau-\kappa)$$
$$< -\sigma^k\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)+k(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{I},Q_{l,j}\right)}{k}\right)+k.Min(\mu,\tau-\kappa).$$

**d) Démonstration de (*4*) :**

$$\frac{r}{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}\left(-\sigma^r\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)+(\mu+\log 2)Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)\right)+r.Min(\mu,\tau-\kappa)\right)+\log(c_{v,2})<-\sigma(\kappa+\mu+\log 2).$$

*****************

Posons

$$A=\frac{r}{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}\left(-\sigma^r\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)+(\mu+\log 2)Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)\right)+r.Min(\mu,\tau-\kappa)\right)+\log(c_{v,2})$$

On a alors

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{r}{Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)}\left(-\sigma\left(\mathrm{t}_{\tau,\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)+(\mu+\log 2)Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_r)\right)+r.Min(\mu,\tau-\kappa)\right)+\log(c_{v,2}) \\ &\leq -\sigma.r\left(\tau+(k+1)\delta\log(n+1)+\mu+\log 2\right)+\sigma.r.Min(\mu,\tau-\kappa)+\log(c_{v,2}) \end{aligned}$$

- Si $r=1$ et $Deg_{\underline{d}}(\mathfrak{P}_1)=1$ alors $\log(c_{v,2})=0$ . Dans ce cas

$$\begin{aligned} A &\leq -\sigma(\tau+\mu+\log 2)+\sigma.Min(\mu,\tau-\kappa)-\sigma(k+1)\delta\log(n+1) \\ &\leq -\sigma\left(\tau+\mu+\log 2-Min(\mu,\tau-\kappa)\right). \end{aligned}$$

Si $\mu\leq\tau-\kappa$ ,

$$\begin{aligned} A &\leq -\sigma(\tau+\mu+\log 2-\mu) \\ &\leq \sigma(-\tau-\log 2) \\ &\leq \sigma(-\kappa-\mu-\log 2) \\ &\leq -\sigma(\kappa+\mu+\log 2). \end{aligned}$$

Si $\mu\geq\tau-\kappa$ ,

$$\begin{aligned} A &\leq -\sigma(\tau+\mu+\log 2+\kappa-\tau) \\ &\leq -\sigma(\kappa+\mu+\log 2). \end{aligned}$$

- Si $r \geq 2$ alors $\log\left(c_{v,2}\right) \leq \left(r-\frac{1}{2}\right)\log\left(\gamma_N\right)$ et cette fois

$$\begin{aligned}\log\left(c_{v,2}\right) &\leq \left(r-\frac{1}{2}\right)\log\left(\gamma_N\right)\\ &\leq \left(r-\frac{1}{2}\right)\log\left(\left(N+1\right)e^{\gamma}\right)\\ &\leq \left(r-\frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{\left(n+1\right)^{2\delta}}{2\delta}e^{\gamma}\right)\\ &\leq \left(r-\frac{1}{2}\right)\left[2\delta\log\left(n+1\right)+\gamma-\log\left(2\delta\right)\right]\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}A &\leq -\sigma.r\left(\tau+\left(k+1\right)\delta\log\left(n+1\right)+\mu+\log 2\right)+\sigma.r.Min\left(\mu,\tau-\kappa\right)+\left(r-\frac{1}{2}\right)\left[2\delta\log\left(n+1\right)+\gamma-\log\left(2\delta\right)\right]\\ &\leq -\sigma.r\left(\kappa+\mu+\log 2\right)-\sigma.r.\left(k+1\right)\delta\log\left(n+1\right)+\left(r-\frac{1}{2}\right)\left[2\delta\log\left(n+1\right)+\gamma-\log\left(2\delta\right)\right]\\ &\leq -\sigma\left(\kappa+\mu+\log 2\right)-\left(r-1\right)\log 2-r.\left(k+1\right)\delta\log\left(n+1\right)+\left(r-\frac{1}{2}\right)\left[2\delta\log\left(n+1\right)+\gamma-\log\left(2\delta\right)\right].\end{aligned}$$

Posons

$$B=-\left(r-1\right)\log 2-r.\left(k+1\right)\delta\log\left(n+1\right)+\left(r-\frac{1}{2}\right)\left[2\delta\log\left(n+1\right)+\gamma-\log\left(2\delta\right)\right].$$

comme $r \geq 2$, on a $k+1 \geq 2$ et alors

$$\begin{aligned}B &\leq -\left(r-1\right)\log 2-2.r.\delta\log\left(n+1\right)+\left(r-\frac{1}{2}\right)\left[2\delta\log\left(n+1\right)+\gamma\right]\\ &\leq -\left(r-1\right)\log 2-\delta\log\left(n+1\right)+\left(r-\frac{1}{2}\right)\gamma\\ &\leq -\left(r-1\right)\log 2-\log 2+\left(r-\frac{1}{2}\right)\gamma\\ &\leq -r\left(\log 2-\gamma\right)\\ &\leq 0\end{aligned}$$

et par conséquent

$$A \leq -\sigma\left(\kappa+\mu+\log 2\right).$$

**e) Démonstration de (*5*) :**

$$\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)\right)\right)<-\sigma^{r-1}\left(\frac{[K{:}\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+(\mu+\log 2)\,Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)\right)+(r-1)\,Min(\mu,\tau-\kappa).$$

*****************

On a

$$\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)\right)\right)<\frac{1}{\sigma}\log\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P}_r)\right)\right)+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}$$
$$+\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\right).$$

Posons

$$A=\frac{1}{\sigma}\log\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P}_r)\right)\right)+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}$$
$$+\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\right).$$

Nous remarquons que :

- $r.Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)=(r-1).Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)$

- d'après la propriété (d)

$$\frac{1}{\sigma}\log\left(Dist_{v,\underline{\mathrm{d}}}\left(\underline{\theta},Z(\mathfrak{P}_r)\right)\right)<-\sigma^{r-1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+(\mu+\log 2)\,Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)\right)+\frac{r}{\sigma}Min(\mu,\tau-\kappa)$$

- d'après le ***Lemme 5.3*** et la propriété *( ii )*

$$-\sigma^{r-1}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)-\mathrm{h}_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\le-\sigma^{r-1}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)-(k+1)\,\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right).$$

Toutes ces remarques nous permettent alors d'écrire

$$A < -\sigma^{r-1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+(\mu+\log 2)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)\right)+\frac{r}{\sigma}Min(\mu,\tau-\kappa)$$

$$+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}$$

$$+\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)-\mathrm{h}_{\underline{\hat{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\right)$$

$$<\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(-\sigma^{r-1}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)+\mathrm{h}_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)-\mathrm{h}_{\underline{\hat{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\right)+r.Min(\mu,\tau-\kappa)$$

$$+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}-\sigma^{r-1}(\mu+\log 2)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)$$

$$<\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\left(-\sigma^{r-1}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\hat{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)-(k+1)\delta\log(n+1)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)+r.Min(\mu,\tau-\kappa)$$

$$+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}-\sigma^{r-1}(\mu+\log 2)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)$$

$$<-\sigma^{r-1}\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\underline{\hat{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+(r-1).Min(\mu,\tau-\kappa)+Min(\mu,\tau-\kappa)-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)$$

$$+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}-\sigma^{r-1}(\mu+\log 2)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r).$$

Montrons alors que

$$Min(\mu,\tau-\kappa)-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\leq(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}.$$

- Soit $Min(\mu,\tau-\kappa)-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)\leq 0$ et alors

$$Min(\mu,\tau-\kappa)-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}\leq(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}.$$

- Soit $Min(\mu,\tau-\kappa)-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)\geq 0$ et alors

$$Min(\mu,\tau-\kappa)-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}$$

$$\leq\left(Min(\mu,\tau-\kappa)-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{S_{i_0},j}\right)\right)\right)}\right)\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}(\mathfrak{P}_r)}{r}$$

Mais alors

- si $\mu \le \tau - \kappa$, on a

$$\begin{aligned}
Min(\mu,\tau-\kappa)-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right) &\le \mu+\log\left(e^{-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)}+e^{-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)+\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\\
&\le \mu+\log\left(e^{-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)}+e^{-\tau+\kappa+\mu}\right)\\
&\le \mu+\log 2
\end{aligned}$$

- si $\mu \ge \tau - \kappa$ , on a

$$\begin{aligned}
Min(\mu,\tau-\kappa)-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right) &\le -\kappa+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\\
&\le \mu+\log\left(e^{-\mu-\kappa+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)}+e^{-\kappa+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{S_{i_0},j}\right)-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\\
&\le \mu+\log\left(e^{-\mu-\kappa+\tau}+e^{-\kappa+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\\
&\le \mu+\log 2
\end{aligned}$$

ce qui donne dans tous les cas

$$Min(\mu,\tau-\kappa)-\tau+\overline{\mathrm{h}}\left(Q^*_{i_0,j}\right)+\log\left(1+e^{\mu-\log\left(Max\left(1,M_v\left(Q^*_{i_0,j}\right)\right)\right)}\right)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)}{r} \le (\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)}{r}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
A &< -\sigma^{r-1}\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+(r-1).Min(\mu,\tau-\kappa)+\sigma^{r-1}(\mu+\log 2)\frac{Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)}{r}-\sigma^{r-1}(\mu+\log 2)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r\right)\\
&< -\sigma^{r-1}\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+(r-1).Min(\mu,\tau-\kappa)-\sigma^{r-1}(\mu+\log 2)Deg_{\underline{\mathrm{d}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)
\end{aligned}$$

et ainsi

$$\log\left(Dist_{v,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\underline{\theta},Z\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)\right)\right) < -\sigma^{r-1}\left(\frac{[K:\mathrm{Q}]}{n_v}\mathrm{t}_{\tau,\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)+(\mu+\log 2)Deg_{\hat{\underline{\mathrm{d}}}}\left(\mathfrak{P}_r,Q_{i_0,j}\right)\right)+(r-1)Min(\mu,\tau-\kappa).\ \square$$

## Références bibliographiques


[ BGS1 ] J._B. Bost, H. Gillet, C. Soulé
*Heights of projectives varietes and positve Green form*
J. Amer. Math. Soc. 7 (1994) n°4 ; p. 903-1022 .

[ BT1 ] P. Bundschuh und T. Töpfer
*Über lineare Unabhängigkeit*
Monatsh. Math. 117 (1994) ; p. 17-32 .

[ C1 ] M. Chardin *Contribution à l'algèbre commutative effective et à la théorie de l'élimination*
Thèse, Univers. P. & M. Curie, Paris (1990) ; Chapitre 1 .

[ J1 ] E. M. Jabbouri *Sur un critère pour l'indépendance algébrique de P. Philippon*
Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1990 ;
W. de Gruyter, Berlin (1992) p. 195-202 .

[ La1 ] M. Laurent *Hauteur de matrices d'interpolation*
Approximations diophantiennes et nombres transcendants, Luminy 1990 ;
W. de Gruyter, Berlin (1992) p. 215-238 .

[ Le1 ] P. Lelong *Mesure de Mahler et calcul de constantes universelles pour les polynômes de N variables*
Math. Ann. 299 (1994 ); p. 673-695 .

[ N1 ] Y. V. Nesterenko *On the linear independence of numbers*
*(Russian)* Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1985) p. 46-49
*(Engl. trans.)* Moscou. Univ. Math. Bull. 40 (1985) p. 69-74 .

[ P1 ] P. Philippon *Critère pour l'indépendance algébrique*
Publications mathématiques I.H.E.S 64 (1986 ); p. 5-52 .

[ P2 ] P. Philippon *Sur les hauteurs alternatives. I*
Math. Ann. 289 (1991 ); p. 255-283 .

[ P3 ] P. Philippon *Sur les hauteurs alternatives. II*
Ann. Inst. Fourier, Grenoble 44, 2 (1994 ); p. 1043-1065 .

[ P4 ] P. Philippon *Sur les hauteurs alternatives. III*
J. Math. Pures Appl. 74 (1995 ); p. 345-365 .

[ S1 ] C. Soulé *Géométrie d'Arakelov et théorie des nombres transcendants*
Journées arithmétiques de Luminy, Astérisque 183 (1990 ); p. 127-135 .